Projeto Material Didático Público

ELOGIO DO APRENDIZADO

Aprenda o mais simples! Para aqueles
Cuja a hora chegou
Nunca é tarde demais!
Aprenda o ABC; não basta, mas
Aprenda! Não desanime!
Comece! É preciso saber tudo!
Você tem que assumir o comando!
Aprenda, homem no asilo!
Aprenda, homem na prisão!
Aprenda, mulher na cozinha!
Aprenda, ancião!
Você tem que assumir o comando!
Frequente a escola, você que não tem casa!
Adquira conhecimento, você que sente frio!
Você que tem fome, agarre o livro: é uma arma.
Você tem que assumir o comando.
Não se envergonhe de perguntar, camarada!
Não se deixe convencer
O que não sabe por conta própria
Não sabe.
Verifique a conta
É você que vai pagar.
Ponha o dedo sobre cada item
Pergunte: o que é isso?
Você tem que assumir o comando.

(Bertolt Brecht)

Edição 2021

NÚCLEO PRÁXIS-USP

Índice das Matérias

Apostila

"Educando para a construção de uma nova sociedade em que os seres humanos possam ser livres"

CURSINHO POPULAR dos estudantes da USP

Projeto Político-Pedagógico da Associação Cultural de Educadores e Pesquisadores da Universidade de São Paulo

ACEPUSP

ASSOCIAÇÃO CULTURAL de EDUCADORES e PESQUISADORES da USP

*

NÚCLEO PRÁXIS de PESQUISA, EDUCAÇÃO POPULAR e POLÍTICA da USP

Projeto Político-Pedagógico de Educação Popular / Edição Digital

“ MATERIAL DIDÁTICO PÚBLICO ”

Esta obra foi escrita coletivamente por professores e estudantes universitários, trabalhadores e militantes pela democratização do ensino que entre 2002 e 2008 construíram o CURSINHO POPULAR DOS ESTUDANTES DA USP: projeto de educação popular da ACEPUSP, entidade oriunda do movimento estudantil uspiano da década de 1990. Dentre seus autores, alguns foram antes membros do CURSINHO DO CRUSP, agremiação em meio à qual se começou a conceber o plano deste material, nos últimos anos do século XX. A presente edição digital foi organizada, revista e atualizada em 2021 pelos pesquisadores e educadores do NÚCLEO PRÁXIS-USP – coletivo político-acadêmico que em parte se originou da militância acepuspiana.

***

Agradecemos o APOIO das seguintes entidades que de variadas formas, mediante parcerias e auxílios econômicos diretos ou infraestruturais, ajudaram a compor este projeto: SINTUSP, AMORCRUSP, ADUSP, DCE-Livre da USP, ASIB/Inst. Butantã, Movimento dos Trabalhadores Rurais Sem Terra, APEOESP, APROPUC, SINPRO-SP, Partido dos Trabalhadores/DZ-Butantã, Programa Diversidade na Universidade/MEC-UNESCO, Fórum Nacional de Cursinhos Pré-Universitários Populares, Instituto Cultura Latina, Inst. Desenvolv. Tradições Indígenas, Depto. História-USP, Depto. Geografia-USP, Depto. Filosofia-USP, Deptos. de Letras-USP, Deptos. de Ciências Sociais-USP, Inst. Física-USP, Depto. Jornalismo-USP, Depto. Artes Plásticas-USP, Fac. Educação-USP, Inst. Matemática e Estat.-USP, Fac. Arquitetura e Urban.-USP, Inst. Oceanografia-USP, Inst. Biociências-USP, Jornal A Palavra Latina, Jornal Brasil de Fato, Jornal do Campus-USP, Rádio Livre da USP “106.X”, Escola Mun. E. F. Amorim Lima-SP, Paróquia Sagrado Coração de Jesus/Pq. Continental-SP, Espaço Cultural O Jardim Elétrico, Espaço Cult. COHAB-Raposo Tavares, e os Centros Acadêmicos de Filosofia, História, Geografia, Letras, C. Sociais, Física, Matemática, Comunicação e Artes, Pedagogia, Engenharia Civil, Arquitetura, Psicologia, Biologia, Bioquímica, Oceanografia, Química, Astronomia e Geologia da USP, e de C. Sociais e Economia da PUC-SP, dentre outros colaboradores.

[CONTATO: nucleopraxis.usp.br@gmail.com]

*

ACEPUSP; NÚCLEO PRÁXIS-USP (autoria coletiva). **Material Didático Público**: ***apostilas pré-universitárias do Cursinho Popular dos Estudantes da USP*** [10 volumes e tomo introdutório]. São Paulo: Edições Núcleo Práxis-USP (Biblioteca Popular), 2021 [baseada na 2ª edição impressa, de 2008, em 4 volumes e introdução/ atualizada e revisada em 2021]. **Disponível em: https://nucleopraxisusp.org .**

PROJETO "MATERIAL DIDÁTICO PÚBLICO"

AUTORES / ACEPUSP*

* LISTA DOS PRINCIPAIS COAUTORES, MILITANTES DA EDUCAÇÃO POPULAR, MEMBROS E PARCEIROS DA ACEPUSP QUE – ENTRE OUTROS COLABORADORES – CONCEBERAM, COORDENARAM, ESCREVERAM, REVISARAM E PRODUZIRAM COLETIVAMENTE ESTA OBRA EM SUA 1ª EDIÇÃO (2002/2003) E 2ª EDIÇÃO (2007/2008).

PROFESSORES MEMBROS DA COORDENAÇÃO GERAL DO PROJETO

Adalberto Tadeu (Geografia-FFLCH-USP)
Alexandre Ribeiro Leichsenring (Inst. Matemática e Estatística-USP)
Cassiano Reinert Novais dos Santos (Fac. Economia e Adm.-USP/ Inst. Matemática e Est.-USP)
Cesar Antonio Alves Cordaro (Fac. Direito-USP/ Sind. Advogados-SP)
Emerson Rios Viana (Ciências Sociais-FFLCH-USP)
Ferenc Diniz Kiss (Inst. Física-USP)
Geraldinho José da Cunha (Sintusp)
Igor Martins Fontes Leichsenring (História-FFLCH-USP)
Ivan Martins Fontes Leichsenring (Letras-FFLCH-USP)
Mariana Vieira Helene (Inst. Física-USP/ Direito-PUC-SP)
Paulo Henrique Tavares Cesar (Inst. Geociências-USP)
Roseana de Souza Pellozo (Inst. Física-USP)
Silfarlem Junior de Oliveira (Artes Visuais-UFES)
Thiago Rocha Cardoso (Inst. Matemática e Estatística-USP/ Fac. Educação-USP)
Yuri Martins Fontes Leichsenring (Esc. Politécnica-USP/ Filosofia-FFLCH-USP)

PROFESSORES MEMBROS DAS COORDENADORIAS PEDAGÓGICAS

Ana Luiza de Azevedo Pires Sérios (Inst. Física-USP/ Jornalismo-PUC-SP)
Anna Karina Diniz Kiss (Fac. Educação-USP)
Antonio Araujo (Letras-FFLCH-USP)
Carolina Poppi (Letras-FFLCH-USP)
Dafne Lima Pessanha de Morais Melo (Jornalismo-PUC-SP/ História-FFLCH-USP)
Elder Nascimento (Letras-FFLCH-USP)
Eduardo Calderini (IME-USP)
Gabriela Viacava (Letras-FFLCH-USP)
Henrique Peres (Letras-FFLCH-USP)
Jacy Gameiro (Inst. Biologia-Unicamp)
João Victor Pavesi de Oliveira (Geografia-FFLCH-USP)
Júlio César da Silva (Inst. Matemática e Estatística-USP)
Leonel de Miranda Sampaio (Fac. Economia e Administração-USP)
Maria Elaine Andreoti (Letras-FFLCH-USP)
Patrícia Amorim da Silva (Letras-FFLCH-USP)
Pedro Kawamura Gonçalves (Inst. Biologia-USP)
Rafael Eichemberger Ummus (Inst. Biologia-USP)
Robson Tadeu Muraro (História-FFLCH-USP)
Renato Douglas Gomes Ribeiro (Inst. Matemática e Estatística-USP)
Rodrigo Ramos da Silva (Inst. Física-USP)
Samantha Stamatiu (Letras-FFLCH-USP)
Simone Bazarian Vosgueritchian (Inst. Biologia-USP)
Suely Midori Aoki (Inst. Física-USP)
Telmo Egmar Camilo Deifeld (Eng. Civil-UFSM/ Esc. Politécnica-USP)
Tiago Barbosa (História-PUC-SP)
Waldo Lao Fuentes Sánchez (Escuela Nac. Antropología e Historia-México)

PROJETO "MATERIAL DIDÁTICO PÚBLICO"

EDIÇÃO DIGITAL – 2021

[OBRA EDITADA EM 11 VOLUMES]

ORGANIZADA, REVISTA E ATUALIZADA PELO

NÚCLEO PRÁXIS de PESQUISA, EDUCAÇÃO POPULAR e POLÍTICA da UNIVERSIDADE de SÃO PAULO

*

ORGANIZAÇÃO GERAL DA EDIÇÃO

YURI MARTINS FONTES L.

*

REVISÃO FINAL E EDITORAÇÃO

ARGUS ROMERO ABREU DE MORAIS
FERENC DINIZ KISS
IVAN MARTINS FONTES LEICHSENRING
MARIANA VIEIRA HELENE
YURI MARTINS FONTES L.

*

REVISÕES ESPECÍFICAS E ATUALIZAÇÃO DE CONTEÚDO

ARGUS ROMERO ABREU DE MORAIS
ATHOS LUIZ VIEIRA
CARLOS ALBERTO BORBA
FERENC DINIZ KISS
IVAN MARTINS FONTES LEICHSENRING
JOANA APARECIDA COUTINHO
MARIANA MENDONÇA MEYER
MARIANA VIEIRA HELENE
PAULO ALVES JUNIOR
PAULO HENRIQUE TAVARES CESAR
PEDRO ROCHA FLEURY CURADO
ROSA MARIA TAVARES ANDRADE
SOLANGE STRUWKA
YURI MARTINS FONTES L.

PROJETO “MATERIAL DIDÁTICO PÚBLICO”

NOTA SOBRE A EDIÇÃO DIGITAL E ORIENTAÇÃO AO ESTUDANTE

Esta edição digital foi elaborada pelo NÚCLEO PRÁXIS–USP, coletivo político-acadêmico vinculado ao LEPHE/História-USP (coord. prof. Wilson do Nascimento Barbosa), criado em 2015 por iniciativa de antigos membros-fundadores da ACEPUSP, juntamente com pesquisadores participantes do Seminário das Quartas/Filosofia-USP (coord. prof. Paulo Eduardo Arantes), com o propósito de atuar na educação popular, formação política e difusão do pensamento socialista.

O texto-base usado na composição desta edição digital é o da 2ª edição impressa, finalizada em 2008. Originalmente, a coleção de APOSTILAS foi dividida em quatro volumes (duas por semestre), além de tomo introdutório. Contudo, visando oferecer uma melhor organização ao estudante pré-universitário – especialmente o autodidata – que busque apoio nesta obra, optou-se na nova edição por estruturar o conjunto do MATERIAL DIDÁTICO PÚBLICO de acordo com suas disciplinas (áreas normalmente cobradas em exames de seleção), totalizando-se assim dez volumes, mais uma introdução: Português/Gramática, Português/Literatura, Redação, História, Geografia, Matemática, Física, Química, Biologia, Inglês, e o tomo extra *Impulso Inicial*.

O estudante deve estar atento ao fato de que, apesar dos esforços dos atuais editores, educadores e pesquisadores por revisar e atualizar o texto original das apostilas, sempre haverá lacunas em qualquer material didático: manuais de estudos nunca são autossuficientes; e há temas que necessitam de renovação mais frequente ou específica. Além disto, de uma perspectiva mais ampla cabe observar que nenhuma teoria é conclusiva: como mostra o pensamento contemporâneo, não existem ciências definitivas, rígidas ou “exatas” (essa crendice *ideológica* da modernidade) – mas o conhecimento se movimenta com a história, dialeticamente.

Por outro lado, tendo-se em vista a falta de democratização da rede mundial (*internet*) – que vem sendo antes usada para segregar e lucrar, de que para incluir e socializar saberes –, este material didático deve servir, para além de seu vasto conteúdo ainda atual, crítico e pedagogicamente bem trabalhado, como um importante ROTEIRO DE ESTUDOS, que oferece um panorama básico dos principais temas exigidos em variadas provas: um guia a partir do qual se poderá pesquisar na rede ou em bibliotecas, com mais facilidade, as informações específicas faltantes ou futuramente vigentes.

Quanto aos EXERCÍCIOS, recomenda-se aos estudantes acessarem as plataformas universitárias e de ensino oficiais e públicas (ENEM, USP, UNICAMP, etc.), onde podem ser encontradas inúmeras questões de exames atuais, cuja tendência – louvável – tem sido a de promover a interdisciplinaridade, quebrando as artificiais fronteiras científicas *modernas* com que a academia ainda divide o conhecimento. Estes são alguns endereços:

ENEM (www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos); FATEC (www.vestibularfatec.com.br/provas-gabaritos); USP/FUVEST (www.fuvest.br); UFBA (www.vestibular.ufba.br); UFMG (www.ufmg.br/copeve); UFSCar (www.ufscar.br); UNESP (www.vunesp.com.br/vestibulares); UNICAMP (www.comvest.unicamp.br); UNIFESP (www.vestibular.unifesp.br).

NOTA ORTOGRÁFICA

O Projeto “Material Didático Público” foi desenvolvido durante a fase de transição para entrada em vigor do “Novo Acordo Ortográfico” da língua portuguesa. A atual edição digital e revista incorporou tais mudanças, porém com algumas ressalvas: como é o caso de certas regras de hífen (imprecisas e polêmicas); e de regras consideradas equivocadas, como normas que causam ambiguidade e dificultam a pronúncia e a própria fluidez da leitura (por exemplo, a confusa supressão do acento da forma verbal “pára” – palavra que mantivemos acentuada).

NOTA POLÍTICA

A partir da segunda década do século XXI, a ACEPUSP passou a ser gerida por pessoas já sem ligação com os fundadores da entidade, como grupos cooperativistas que, embora manifestem viés progressista, não necessariamente mantiveram as perspectivas socialistas, educacionais, histórico-científicas e o caráter de projeto popular crítico segundo os quais a associação foi construída – e conforme consta em seu estatuto de fundação. Desse modo, seus membros-fundadores e demais pioneiros (alguns dos quais ora membros do Núcleo Práxis-USP) não são responsáveis pelo teor que porventura poderá ser encontrado em novas edições ou outras versões deste material didático, ou ainda pelas práticas institucionais implementadas desde então na ACEPUSP (associação que hoje não conta com a participação de nenhum de seus criadores).

ASSOCIAÇÃO CULTURAL DE EDUCADORES E PESQUISADORES DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Matemática

(tomo VI)

Matemática

Sumário Geral

Matemática

Parte I

ÍNDICE DE MATEMÁTICA - PARTE I (FRENTES UM, DOIS E TRÊS)

FRENTE UM

****

FRENTE DOIS

****

FRENTE TRÊS

****

GABARITO GERAL - PARTE I (FRENTES UM, DOIS E TRÊS)

FRENTE UM

1. EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES POLINOMIAIS

EQUAÇÃO DO 1^{O}GRAU

Toda equação aberta do tipo:

$$ax + b = 0$$

onde $a \in \Re$ e $b \in \Re$ é chamada de equação polinomial do 1º grau.

CONJUNTO SOLUÇÃO

O conjunto solução ou verdade é formado pelos valores que tornam a equação verdadeira quando são assumidos pela variável.

Logo abaixo temos um exemplo de uma equação na variável x:

$$x - 3 = 0,$$

percebemos que o valor que a variável x tem de assumir é 3, logo, o seu conjunto solução é:

$$S = \{3\}$$

Dizemos também que 3 é a *raiz* da equação.

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

Para descobrirmos os valores que as incógnitas podem assumir para que as equações sejam verdadeiras, podemos construir *equações equivalentes*:

1) somando ou subtraindo um mesmo número aos dois membros da equação.
2) multiplicando ou dividindo por um número diferente de zero os dois membros.

Exemplo

Resolva as seguintes equações:

a) $2x - 5 = 3$

Somamos 5 aos dois membros da equação:

$$2x - 5 + 5 = 3 + 5$$
$$2x = 8$$

Agora, dividimos os dois membros por 2.

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$$
$$x = 4$$

Nesta última equação, o valor de x fica evidente, portanto:

$$S = \{4\}$$

Repare que quando somamos 5 aos dois membros da equação, foi como se tivéssemos passado o –5 do primeiro membro para o segundo membro com o sinal trocado. E quando dividimos a equação por dois, foi como se o 2 que estava multiplicando o x tivesse passado para o segundo membro dividindo, por isso, vamos resolver a mesma equação assim:

$$2x - 5 = 3$$
$$2x = 3 + 5$$
$$x = \frac{8}{2}$$
$$x = 4$$

b) $3x + 6 = x + 10$

Somamos aos dois membros -6.

$$3x + 6 - 6 = x + 10 - 6$$
$$3x = x + 4$$

Subtraímos x dos dois membros.

$$3x - x = x + 4 - x$$
$$2x = 4$$

Dividimos por 2 os dois membros.

$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$$
$$x = 2$$
$$S = \{2\}$$

c) $\dfrac{2}{x+4} = 1$

Multiplicamos os dois membros por $(x+4)$.

$$\frac{2(x+4)}{(x+4)} = 1(x+4)$$
$$2 = x + 4$$

Subtraímos 4 aos dois membros.

$$2 - 4 = x + 4 - 4$$
$$-2 = x$$
$$S = \{-2\}$$

EXERCÍCIOS

1. Resolva as seguintes equações
a) $3 - 5x = -2$
b) $-7 + 4x = 8 - x$
c) $27 + 5x = -23 - 5x$
d) $6x - 8 = -16x + 8$
e) $2(2x-5) - 3(4-x) = 4(3x-5) - 2$
f) $\dfrac{x+1}{3} + \dfrac{2x-3}{2} = 1$
g) $5(x+1) - 2(1-x) = 3(3x+1)$
h) $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{3}{2} = 5$

2. Sendo x a incógnita, resolva literalmente as equações (considere a, b e c como números reais estritamente positivos), como no exemplo:
a) $ax - b = 0 \quad \rightarrow \quad ax = b \quad x = b/a \quad S = \{b/a\}$
b) $x - a = 2b$
c) $\dfrac{2x - a}{b} = 3$
d) $\dfrac{x}{a} - \dfrac{x}{b} = c$
e) $x^2 + 2xa + a^2 = b^2$

Dica: use um produto notável

3. (MACK-2004) O conjunto solução da equação $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = x - 2$, é:
a) $[2;\infty[$
b) $[0;1]$
c) $[1;2]$
d) $[0;\infty[$
e) $\Re$

4. (FGV) A raiz da equação $\frac{x+1}{3}-\frac{2x+1}{4}=1$, é:
a) um número maior que 5.
b) um número menor que –11.
c) um número natural.
d) um número irracional.
e) um número real.

5. (PUC) O dobro de um número adicionado a sua terça parte é igual a 42. O quadrado desse número é:
a) 441
b) 324
c) 361
d) 225
e) 100

6. (FUVEST) Resolvendo a equação $\frac{2x}{3}-\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$, o valor de x obtido é:
a) 3/8
b) 5/8
c) 15/8
d) 7/8
e) 11/8

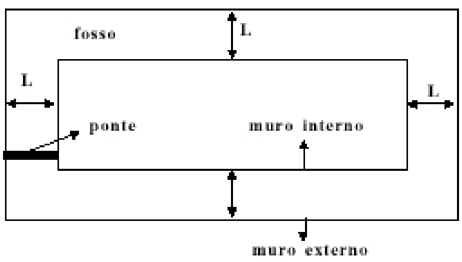
7. Sabendo que o número 6 é raiz da equação $6x-3m=8x-3$, obtenha o valor de *m*.

8. Obtenha três números inteiros e consecutivos cuja soma é 66.

9. Qual é o número que somado à sua terça parte, com o seu dobro e o seu triplo resulta em 38?

10. (VUNESP-2004) Maria tem em sua bolsa R$15,60 em moedas de 10 centavos e de 25 centavos. Dado que o número de moedas de 25 centavos é o dobro do número de moedas de 10 centavos, o total de moedas na bolsa é:
a) 68
b) 75
c) 78
d) 81
e)84

11. (FUVEST/2002) Um senhor feudal construiu um fosso, circundado por muros, em volta de seu castelo, conforme a planta abaixo, com uma ponte para atravessá-lo. Em um certo dia, ele deu uma volta completa no muro externo, atravessou a ponte e deu uma volta completa no muro interno. Esse trajeto foi completado em 5320 passos. No dia seguinte, ele deu duas voltas completas no muro externo, atravessou a ponte e deu uma volta completa no muro interno, completando esse novo trajeto em 8120 passos. Pode-se concluir que a largura L do fosso, em passos, é:
a) 36
b) 40
c) 44
d) 48
e) 50



12. (FGV) Num pátio existem automóveis e bicicletas. O número total de rodas é 130 e o número de bicicletas é o triplo do número de automóveis. Calcule o número de veículos existentes no pátio.
a) 50
b) 42
c) 52
d) 54
e) 62

13. (FUVEST) As soluções da equação $\frac{x-a}{x+a}+\frac{x+a}{x-a}=\frac{2(a^4+1)}{a^2(x^2-a^2)}$, onde $a\neq 0$, são:
a) –a/2 e 2/4
b) -1/4 e a/4
c) -1/2a e 1/2a
d) -1/a e 1/2a
e) -1/a e 1/a

EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Equação do 2º grau ou <u>equação quadrática</u> é uma expressão matemática do tipo:

$$ax^2+bx+c=0$$

sendo a, b e c números reais, com $a\neq 0$.

Uma equação do 1º grau possui uma única solução, enquanto a do 2º grau possui duas soluções. Chamaremos a estas soluções de x_1 e x_2. As soluções de uma equação quadrática são dadas pela fórmula de Báscara (matemático do século XII nascido na Índia):

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

As duas soluções são obtidas considerando-se os sinais + e – no numerador.

A expressão b^2-4ac dentro da raiz, é simbolizada com a letra Δ (delta). Dependendo do sinal e valor de Δ existirão diversas situações:

$\Delta > 0$ Duas raízes reais e diferentes ($x_1\neq x_2$)

$\Delta = 0$ Uma única raiz real ($x_1= x_2$)

$\Delta < 0$ Não existem raízes reais ($\nexists\ x_1, x_2$)

EXERCÍCIOS

14. Resolver as seguintes equações em $\Re$.
a) $x^2-4=0$
b) $2x^2-18=0$
c) $x^2-x=0$
d) $x^2-10x=0$
e) $x^2+3x+2=0$
f) $x^2-5x+6=0$
g) $x^2+5x=-6$
h) $x^2-x-12=0$
i) $2x^2-x-3=0$
j) $4x^2+12x+5=0$
k) $3x^2-x-4=0$
l) $x^2/2-x+4/9=0$

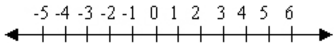
15. Um número natural multiplicado pelo seu consecutivo resulta em 110. Quais são estes dois números?

INEQUAÇÕES DO 1º GRAU

Uma inequação se refere a uma desigualdade, esta desigualdade é indicada pelos seguintes sinais:

>	Maior que
<	Menor que
≥	Maior ou igual que
≤	Menor ou igual que

Começaremos a estudar as inequações vendo na reta real um conceito muito importante. Logo abaixo está ilustrada a reta real.



como os números maiores estão à direita, tiramos duas conclusões bem conhecidas: $3<5$ e que $-3>-5$

Dizemos que -3 é o oposto de 3 e que -5 é o oposto de 5.

Repare que quando pegamos os opostos da primeira desigualdade $3<5$, necessariamente o sinal da desigualdade se inverte ficando $-3>-5$.

Portanto, quando multiplicamos ou dividimos os membros da inequação por um número negativo, invertemos o sinal da desigualdade.

Exemplos

1) Resolva a inequação

a) $x+5>2$

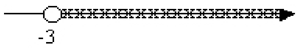
Somamos -5 nos dois membros (neste caso NÃO se inverte o sinal da desigualdade).

$$x+5-5>2-5$$
$$x>-3$$

Fazem parte do conjunto solução todos os valores que a variável x pode assumir e que deixe a inequação verdadeira, então:

$$S=\{x\in\Re \,/\, x>-3\}$$

Podemos representar o conjunto solução na reta real:



2) $-2x<10$.

Multiplicamos a equação por -1, portanto precisamos inverter o sinal da inequação.

$$(-1)\quad -2x<10\quad(-1)$$
$$2x>-10$$
$$x>-10/2$$
$$x>-5$$
$$S=\{x\in\Re \,/\, x>-5\}$$

EXERCÍCIOS

16. Resolver as seguintes inequações:

a) $2x+9\le 5x-7$

b) $x-3<1-2x$

c) $3-x\le -1+x$

d) $3x+(2x+1)>5(1-x)$

e) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}<\frac{x+1}{4}$

f) $4(x+1)+x<5x+7$

g) $-3(x-1)>-3x+5$

17. (FAAP/2001) Além do custo administrativo fixo, diário, de R$ 500,00, o custo de produção de x unidades de certo item é de R$ 2,50 por unidade. Durante o mês de maio, o custo total de produção variou entre o máximo de R$ 1.325,00 e o mínimo de R$ 1.200,00 por dia. Os níveis de produção máximo e mínimo durante o mês foram:

a) $480 \le x \le 530$

b) $680 \le x \le 730$

c) $180 \le x \le 230$

d) $280 \le x \le 330$

e) $380 \le x \le 430$

18. (FUVEST-2004) Um estacionamento cobra R$6,00 pela primeira hora de uso, R$3,00 por hora adicional e tem uma despesa diária de R$320,00. Considere um dia em que sejam cobradas, no total, 80 horas de estacionamento. O número mínimo de usuários necessário para que o estacionamento obtenha lucro nesse dia é:

a) 25

b) 26

c) 27

d) 28

e) 29

19. (VUNESP-2004) Carlos trabalha como disc-jóquei (dj) e cobra uma taxa fixa de R$100,00, mais R$20,00 por hora, para animar uma festa. Daniel, na mesma função, cobra uma taxa fixa de R$55,00, mais R$35,00 por hora. O tempo máximo de duração de uma festa, para que a contratação de Daniel não fique mais cara que a de Carlos, é:

a) 6 horas.

b) 5 horas.

c) 4 horas.

d) 3 horas.

e) 2 horas.

20. (UNIFESP-2004) Para ser aprovado num curso, um estudante precisa submeter-se a três provas parciais durante o período letivo e a uma prova final, com pesos 1, 1, 2 e 3, respectivamente, e obter média no mínimo igual a 7. Se um estudante obteve nas provas parciais as notas 5, 7 e 5, respectivamente, a nota mínima que necessita obter na prova final para ser aprovado é:

a) 9

b) 8

c) 7

d) 6

e) 5

SOMA E PRODUTO DAS RAÍZES

Seja a equação do 2º grau $ax^2+bx+c=0$ e x_1 e x_2 suas raízes, pode-se mostrar que a soma e o produto de ambas raízes obedecem as seguintes igualdades:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Exemplo

1) Ache as raízes da equação $2x^2-10x+12=0$.

Vamos chamar suas raízes de x_1 e x_2 e calcular o valor da soma dessas raízes:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{(-10)}{2}=\frac{10}{2}=5$$

Também sabemos o valor do produto das raízes:

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{12}{2}=6$$

Como a soma das raízes é 5 e seu produto é 6, então as raízes são 2 e 3 pois são os únicos números cuja soma é 5 e produto é 6. Logo:

$$x_1=2 \text{ e } x_2=3$$

EXERCÍCIOS

21. Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $2x^2 - 6x + 1 = 0$, calcule:

a) $x_1 + x_2$

b) $x_1 \cdot x_2$

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

d) $x_1^2 + x_2^2$

22. (MACK) Um valor de k para que uma das raízes da equação $x^2 - 4kx + 6k = 0$ seja o triplo da outra é:
a) 5
b) 4
c) 3
d) 2
e) 1

23. (FGV) Considere a equação $x^2 - 4x - 7 = 0$ e sejam x_1 e x_2 suas raízes. Então $x_1^2 + x_2^2$ vale:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 30
e) 31

24. (MACK) A soma e o produto das raízes da equação $\frac{x}{-x+1} - \frac{3}{x} = 0$, $x \neq 0$ e $x \neq 1$ são respectivamente:
a) 2 e 3
b) – 2 e – 3
c) 3 e – 3
d) – 3 e – 3
e) 3 e 2

25. (FGV) A soma das raízes da equação $x^2 + b \cdot x + c = 0$ é 10 e o produto das raízes é –2. Logo,
a) b + c = 8
b) b + c = – 8
c) b + c = – 12
d) b . c = 12
e) b . c = – 12

EQUAÇÃO BIQUADRADA

Uma equação na forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, com $a \neq 0$ é dita <u>equação biquadrada</u>.

Exemplo:

Resolva a equação $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.
Podemos escrever a mesma equação da seguinte forma:

$$\left(x^2\right)^2 - 5x^2 + 4 = 0$$

Conseguimos, desta forma, recair em uma equação do 2º grau e para visualizarmos melhor mudaremos a variável usando a relação $x^2 = y$, então:

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

Resolvendo por soma e produto, temos:

$$y_1 + y_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-5)}{1} = 5 \quad \text{e} \quad y_1 \cdot y_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

portanto, os únicos números cuja soma é 5 e produto é 4 são $y_1 = 1$ e $y_2 = 4$.

Mas, não estamos buscando os valores de y e sim os de x, portanto usaremos agora a relação adotada usando os valores de y_1 e y_2.

$$x^2 = y_1 \qquad x^2 = y_2$$
$$x^2 = 1 \quad \text{e} \quad x^2 = 4$$
$$x = \pm 1 \qquad x = \pm\sqrt{4}$$
$$x = \pm 2$$

Então o conjunto solução é $S = \{-2, -1, 1, 2\}$

EXERCÍCIO

26. Resolva as seguintes equações em R:

a) $2x^4 - 5x^2 - 3 = 0$

b) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

c) $\frac{\left(x^2 - 2\right)^2}{3} = 2\left(x^2 - 2\right)$

FATORAÇÃO DO TRINÔMIO DO 2º GRAU

Se x_1 e x_2 são raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, pode-se mostrar que é possível fatorar o trinômio do segundo grau $ax^2 + bx + c$ na seguinte forma:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$$

Exemplo

1) Fatore o trinômio $x^2 - 7x + 12$.

Vamos achar as raízes da equação $x^2 - 7x + 12 = 0$. Temos que $a = 1$, $b = -7$ e $c = 12$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1}$$

Então temos: $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$

Logo, $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$

EXERCÍCIOS

27. Fatore os trinômios abaixo:

a) $x^2 - 3x + 2 =$

b) $2y^2 + 4y - 6 =$

c) $a^2 - 7a + 10 =$

d) $(bc)^2 - bc - 6 =$

28. Simplifique:

a) $\frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 2)} =$

b) $\frac{2x^2 - 14x + 24}{x^2 + x - 12} =$

2. INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES

FUNÇÕES E SUAS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

Este tema é um dos mais importantes, pois ao longo do curso estudaremos funções de diversos tipos (lineares, quadráticas, exponenciais, etc.), assim como a suas representações por meio de gráficos. Veremos como obter informações sobre as funções através da observação da representação gráfica e vice-versa. Para este importante tema começaremos definindo como representar um ponto num plano.

SISTEMA CARTESIANO E PAR ORDENADO

Para localizar um ponto num plano é necessário dar o valor de duas coordenadas (graus de liberdade). Um exemplo disso é a localização de um determinado ponto de referência num plano, como os de um guia de ruas de uma cidade. Em cada planta, temos duas escalas, uma vertical (numérica) e uma horizontal (alfabética), um lugar determinado, por exemplo, pode estar na posição H2. Outro exemplo é o uso da latitude e da longitude para dar a localização de um determinado ponto na superfície do planeta.

Para construir o gráfico de uma função necessitamos definir como representar números numa superfície. Com esse motivo utilizaremos a Representação Cartesiana Ortogonal de um sistema de coordenadas.

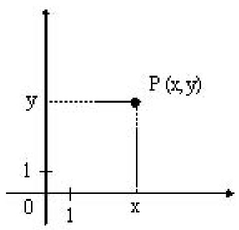
Um sistema de coordenas cartesiano é formado por duas retas numéricas (eixos de coordenadas), uma perpendicular (eixo das ordenadas ou eixo y) e outra horizontal (eixo das abscissas ou eixo x), com as seguintes características:

As origens de ambos os eixos devem coincidir.

A direção positiva do eixo das ordenadas é para cima e a do eixo das abscissas é para a direita.

A unidade de medida é a mesma para ambos eixos.

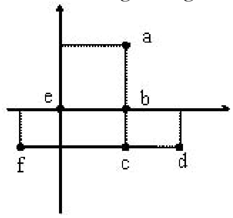
A posição de um ponto P num plano é dada por meio de um par ordenado (x, y), um par de números reais entre parênteses e separados por vírgulas. O primeiro elemento do par, ou número x, representa a abscissa do ponto e o segundo elemento do par ou número y representa a ordenada.



EXERCÍCIOS

1. Representar num sistema de eixos cartesianos, os seguintes pontos:
A (2,3)
B (5,0)
C (-1,3)
D (-2,-2)
E (0,-1)
F (3,-1)

2. Dado o seguinte gráfico



i) Quais os pontos que têm as mesmas abscissas?
ii) Quais os pontos que têm as mesmas ordenadas?
iii) Que pontos têm abscissa nula?
iv) Que pontos têm ordenada nula?

FUNÇÕES

Com frequência encontramos em Matemática relações entre duas grandezas variáveis. Muito provavelmente você deve conhecer a fórmula do perímetro de um quadrado:

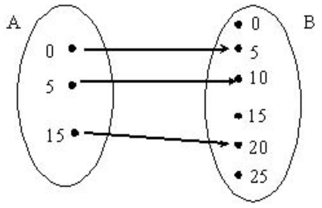
$$P = 4\,l$$

Sendo P o perímetro e l o valor do lado do quadrado. Notamos que o valor do perímetro depende da medida do lado do quadrado. Se $l = 1\text{cm}$ então $P = 4\text{cm}$. Se l = 2cm então P = 8cm e assim por diante. Dizemos que o perímetro P é dado em função de l ou que P é uma função de l. A fórmula $P = 4l$ é a fórmula matemática desta função.

NOÇÃO DE FUNÇÃO ATRAVÉS DE CONJUNTOS

Exemplo

Dados dois conjuntos de números $A = \{0, 5, 15\}$ e $B = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$, seja a relação de A com B expressa pela fórmula $y = x + 5$, com $x \in A$ e $y \in B$.



Observamos que:

- Todos os elementos de A estão relacionados a elementos de B.

- Cada elemento de A está associado a um único elemento de B.

- Neste caso a relação entre A e B é uma função de A em B. As características descritas acima valem para todas as funções.

DEFINIÇÃO FORMAL:

Sendo A e B dois conjuntos não vazios e uma relação f de A em B, essa relação f é uma função de A em B, quando a cada elemento x do conjunto A está associado a um único elemento y do conjunto B.

Pode-se escrever:

f: A→B (lê-se: f é uma função de A em B)

Observação: Podemos usar a seguinte notação para a lei de associação que define uma função

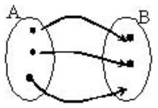
$$y = x + 5 \quad \text{ou} \quad f(x) = x + 5$$
$$y = x^2 \quad \text{ou} \quad f(x) = x^2$$

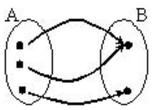
ou seja, y e f(x) representam o mesmo.

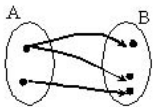
EXERCÍCIOS

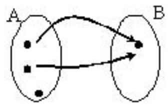
3. Seja f uma relação de A em B com A={0,1,2} e B ={0,1,2,3,4,5,6} dada pela fórmula $y = x + 3$ com $x \in A$ e $y \in B$. Faça um diagrama e diga se f é uma função de A em B.

4. Das seguintes representações esquemáticas, diga quais correspondem a uma função de A em B.

a)


b)


c)


d)


DOMÍNIO E IMAGEM DE UMA FUNÇÃO

Consideremos novamente o exemplo apresentado no início do tema de funções. O domínio da função, o indicamos com Dom, é o conjunto A.

x	y
0	5
5	10
15	20

Nesse exemplo $\text{Dom} = \{0,5,15\}$. O domínio também é chamado de campo de definição ou campo de existência da função.

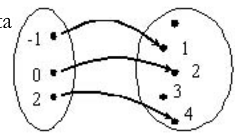
O conjunto {5,10,20} é um subconjunto de B e é denominado de conjunto imagem e o denotamos como Im. Ele é formado pelos elementos de B que são selecionados pela função f:

$$\text{Im} = \{5,10,20\}$$

O conjunto B leva o nome de Contradomínio da função.

EXERCÍCIOS

5. Considerando o diagrama seguinte, que representa uma função, determine o que se pede:



a) Dom
b) f(-1)
c) f(0)
d) f(2)
e) Im
f) A lei de associação

6. Dados os conjuntos $A = \{-2,-1,0,1\}$ e $B = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ determine:

a) Im se a f:A → B é definida por $f(x) = x^2$
b) Im se $f(x) = 2x + 2$
c) Im se $f(x) = x^2 - 1$

7. Se $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$, calcule:

a) $f(-1)$
b) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$
c) $f\left(\sqrt{2}\right)$
d) $f\left(1+\sqrt{2}\right)$

GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

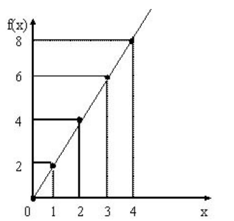
Uma função $f: A \to B$ pode ser representada graficamente. Um gráfico não é outra coisa senão um *conjunto de pontos* que representam a relação funcional num sistema de eixos coordenados cartesianos. Cada ponto da representação gráfica da função terá associado um par ordenado do tipo (x, f(x)), ou seja, o valor da abscissa é um valor x determinado do domínio da função e a ordenada é o valor associado a x por meio da função (a sua imagem por f).

Exemplo:

Vamos fazer o gráfico da função $f: \Re \longrightarrow \Re, f(x) = 2x$.

Construamos uma tabela escolhendo valores arbitrários para x e calculemos f(x).

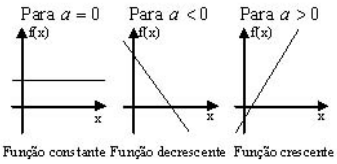
x	f(x)
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8



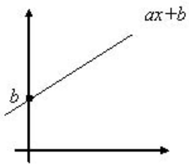
Vemos que todos os pontos parecem estar posicionados sobre uma mesma reta. Este é um caso particular de função: função do 1º grau ou função linear.

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU OU FUNÇÃO LINE $f: \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ AR

Uma função do 1º grau é uma função do tipo $y = ax + b$, sendo a e b números reais, com $a \neq 0$, sua representação gráfica é uma reta. As características gerais da reta podem ser obtidas simplesmente da observação da equação. O valor absoluto do coeficiente a, também chamado de coeficiente angular, determina o grau de inclinação da reta e b é chamado de coeficiente linear. O sinal, por sua vez, determina se a função é crescente ou decrescente. A situação geral é apresentada no seguinte desenho:



Da definição de função de primeiro grau, $f(x) = ax + b$, vemos que quando $x = 0$, então $f(x) = b$. Portanto b (termo independente) é a ordenada do ponto onde a reta intercepta o eixo de ordenadas.



EXERCÍCIOS

8. Construa num plano cartesiano a representação gráfica das seguintes funções e diga se são crescentes ou decrescentes.
a) $f(x) = x$
b) $f(x) = 2x + 1$
c) $f(x) = -x + 1$
d) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 1$

ZERO OU RAIZ DA FUNÇÃO

Denomina-se <u>zero</u> ou <u>raiz</u> da função $f(x) = ax + b$, o valor de x que anula a função, isto é, torna $f(x) = 0$ (observe que esta última equação é do 1º grau).

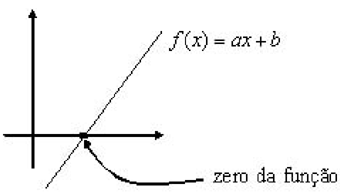
Exemplo:

Calcular o zero da função $f(x) = 3x - 2$

$$3x - 2 = 0$$
$$3x = 2$$
$$x = \frac{2}{3}$$

Logo, o zero da função dada é $x = \dfrac{2}{3}$.

Graficamente, o zero da função do 1º grau $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é a abscissa do ponto em que a reta corta o eixo x.



EXERCÍCIOS

9. Calcule os zeros das seguintes funções:
a) $f(x) = x + 3$
b) $f(x) = -2x + 4$
c) $f(x) = 3x + 1$
d) $f(x) = 2x - 6$
e) $f(x) = -\dfrac{x}{2} + 1$
f) $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3}$

10. Dadas as seguintes funções, determine os valores de x para os que $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$.
a) $f(x) = 2x - 4$
b) $f(x) = -2x - 4$
c) $f(x) = 2x + 1$
d) $f(x) = -\dfrac{x}{2} + 3$

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU OU FUNÇÃO QUADRÁTICA

Uma função $f : \Re \longrightarrow \Re$ do 2º grau ou <u>quadrática</u> é dada por uma expressão do tipo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

sendo $a \neq 0$. A representação gráfica de uma função quadrática é dada por uma <u>parábola</u>. As principais características são as seguintes (para conferir isto sugerimos, como exercício, fazer o gráfico das seguintes funções $f(x) = 2x^2 + 1$, $f(x) = -2x^2 + 1$):

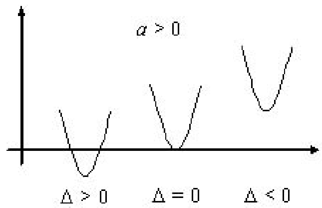
A concavidade é voltada para cima se $a > 0$ e é para baixo se $a < 0$.

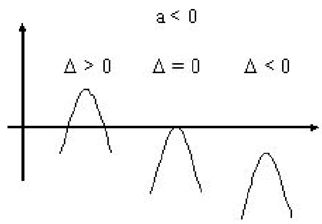
A curva (parábola) tem um eixo de simetria que passa pelo vértice V da parábola

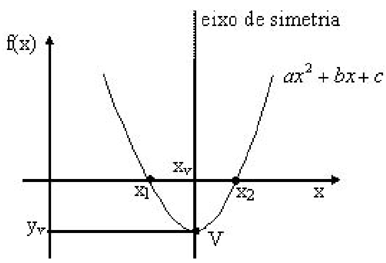
As coordenadas do vértice V são dadas por $= \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Os zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, matematicamente, representam as raízes da equação quadrática, ou seja, são as soluções da equação $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$. Graficamente, representam as abscissas dos pontos onde a parábola corta o eixo das abscissas.

Estas conclusões encontram-se esquematizadas nos seguintes desenhos:







Observação: Muitas vezes a representação gráfica exata de uma função não é necessária. Muita informação valiosa pode ser obtida fazendo somente uma representação esquemática da curva". Para esse fim precisamos saber, no máximo, as seguinte informações:

sentido da concavidade
se corta ou não o eixo das abscissas
no caso de cortar o eixo das abscissas, em quantos pontos o faz
se a função tem um valor máximo ou mínimo

Todas estas informações são obtidas a partir da análise apresentada anteriormente.

Exemplo:

Dada a função quadrática $f:\Re \longrightarrow \Re$, $f(x)=x^2-3x-4$ determine:

a) O sentido da concavidade

Sendo $ax^2+bx+c=0$, a concavidade é para cima.

b) Os zeros da função

Apliquemos a fórmula de Báscara à equação $x^2-3x-4=0$:

$$x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}$$

$$x_1=\frac{3+5}{2} \quad \text{e} \quad x_2=\frac{3-5}{2}$$

$$x_1=4 \qquad x_2=-1$$

c) Se a função tem máximo ou mínimo e calcule o valor

Como a função tem a concavidade voltada para cima, a função deve ter um valor mínimo (em caso contrário teria um máximo). Em qualquer caso, o valor mínimo ou máximo de f(x) está dado pela ordenada do vértice da função. No nosso caso particular f tem um mínimo:

$$f(x)_{\min}=y_v=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-25}{4}$$

d) Determine os valores reais de x para os que $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ e $f(x)<0$.

Como a parábola tem dois zeros reais e diferentes ela corta o eixo das abcissas em dois pontos. Então, como a parábola tem a concavidade voltada para cima, para valores de x menores que x_1 e maiores que x_2 $(x_1<x_2)$ a função terá valores positivos $(f(x)>0)$ e para valores de x entre x_1 e x_2 a função toma valores negativos $(f(x)<0)$.

$$f(x)>0 \text{ para } x<x_1 \text{ e } x>x_2,$$

$$f(x)<0 \text{ para } 2x^2-10x+12=0.$$

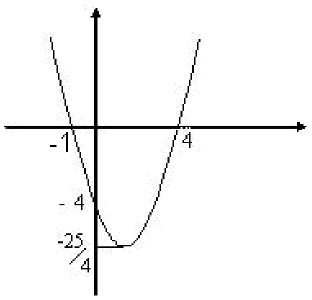
e) O ponto em que a parábola corta o eixo das ordenadas

Para determinar o ponto em que a parábola corta o eixo das ordenadas temos que calcular o valor de $f(x)$ quando x toma o valor 0, ou seja x_1 e x_2.

$$f(x=0)=0^2-3\cdot 0-4=-4.$$

Portanto a parábola corta o eixo de ordenadas em –4.

f) Elabore um esboço da curva



g) O conjunto imagem da função

Como a função f tem um mínimo, a imagem da função está dada por todos os números reais R maiores e iguais que $f(x)_{\min}$. Portanto,

$$\text{Im}=\{r\in\Re / r\geq\frac{-25}{4}\}$$

Observação: em geral, a notação utilizada na definição de conjuntos de números para indicar um número qualquer é a letra x. Portanto, a definição do conjunto imagem da função, sem confundir a x indicando um número qualquer com um elemento do domínio da função, geralmente é escrita da seguinte forma: $\text{Im}=\{x\in\Re / x\geq\frac{-25}{4}\}$

EXERCÍCIOS

11. Esboçar o gráfico e dar o conjunto imagem da função quadrática.

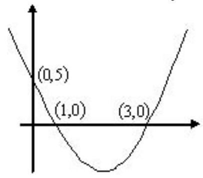
a) $y=2x^2-8x+6$

b) $y=-x^2+4x-3$

c) $y=x^2-2x-1$

d) $y=-2x^2+4x-2$

12. Escreva a função quadrática representada pela parábola abaixo.



INEQUAÇÕES DO 2º GRAU

A inequação do 2º grau é uma desigualdade matemática do tipo:

$$ax^2+bx+c>0$$

Outros símbolos de desigualdade que podem aparecer são os mesmos aos apresentados no tratamento das inequações do 1º grau.

O lado esquerdo da inequação é uma função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$. Portanto, resolver uma inequação significa determinar os valores reais de x que satisfazem a inequação dada (no caso acima apresentado seria $f(x)>0$).

Exemplos:

1) Resolver a inequação $2x^2-3x+1>0$.

A função quadrática associada é $f(x)=2x^2-3x+1$, sendo $a=2>0$, portanto a representação gráfica da função é uma parábola com a concavidade voltada para cima.

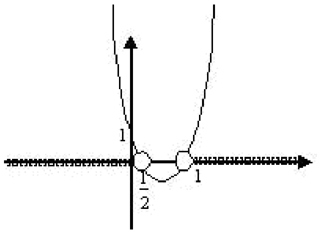
Determinemos os pontos em que a parábola corta o eixo das abscissas:

$$x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{9-8}}{4}$$

$$x_1=\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_2=1$$

Portanto a parábola corta o eixo das abscissas em dois pontos. Como devemos ter $f(x)>0$, a solução da inequação é:

$$S=\{x\in\Re / x<\frac{1}{2}\_ou\_x>1\}$$



2) Resolva a inequação $-x^2+5x-6<0$.

A função associada é $f(x)=-x^2+5x-6$.

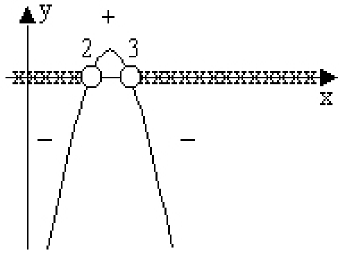
Como $a=-1<0$ então a concavidade é voltada para baixo.

Zero da função:

$-x^2+5x-6=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(-1)(-6)}}{2(-1)}$$

$$\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=3 \end{cases}$$



Pelo esboço da parábola, podemos concluir que antes de 2 e depois de 3 a parábola está abaixo do eixo x, ou seja, $f(x)=-x^2+5x-6<0$ portanto, são nestes intervalos que a inequação é verdadeira.

$$S=\{x\in\Re / x<2\_ou\_x>3\}$$

EXERCÍCIO

13. Resolver as seguintes inequações.

a) $-4x^2+4x-1<0$

a) $-4x^2+4x-1<0$

b) $x^2-1\le 0$

c) $x^2\ge 3x$

d) $x<x^2$

e) $(x-1)^2\ge 3-x$

f) $x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\le 0$

g) $2x^2-5x+6>0$

h) $x^2-5x+8<0$

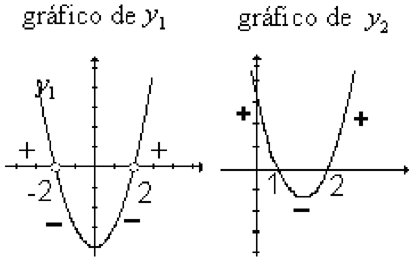
INEQUAÇÕES PRODUTO E QUOCIENTE

Observe a seguinte inequação:

$$\underbrace{\left(x^2-4\right)}_{y_1}\underbrace{\left(x^2-3x+2\right)}_{y_2}>0$$

Se fizermos a multiplicação teremos uma inequação de 4º grau. Desta forma, é mais vantajoso fazer o estudo do sinal de cada fator que podemos interpretar com duas funções, por isso as chamamos de y_1 e y_2.

$$y_1=x^2-4\text{, tem raízes: } x_1=-2 \text{ e } x_2=2$$
$$y_2=x^2-3x+2\text{, tem raízes: } x_3=1 \text{ e } x_4=2$$



	-2	1	2	
y_1	+	–	–	+
y_2	+	+	–	+
$y_1\cdot y_2$	+	–	+	+

Montamos então uma tabela descrevendo o sinal da função nos intervalos limitados pelas raízes das funções. Na terceira linha fazemos a multiplicação destes sinais.

Vale a pena lembrar que o valor da raiz torna a função nula, portanto não nos interessa neste caso (por isso representamos com os círculos abertos).

A solução da equação são os intervalos que têm sinal positivo, pois satisfazem a inequação $y_1\cdot y_2>0$, portanto:

$$S=\{x\in\Re / x<-2\_ou\_1<x<2\_ou\_x>2\}$$

No exemplo dado acima, tínhamos uma multiplicação de duas funções, mas podemos fazer o estudo dos sinais também nos casos que aparecerem divisões. Nesse caso, as raízes ou zeros da função que estiverem no denominador têm que ser levados em conta e desconsiderados do conjunto solução.

EXERCÍCIOS

14. Resolva as seguintes inequações:

a) $\left(x^2-1\right)\left(2x-1\right)\le 0$

b) $\frac{x^2+2x}{x^2+x-2}>0$

c) $\frac{x}{x+1}-\frac{x}{x-1}\ge 0$

15. (PUC-SP-2004) Quantos números inteiros e estritamente positivos satisfazem a sentença $\frac{1}{x-20}\le\frac{1}{12-x}$?

a) Dezesseis
b) Quinze
c) Quatorze
d) Treze
e) Menos que treze.

3. MÓDULO, FUNÇÃO COMPOSTA E FUNÇÃO INVERSA.

MÓDULO

O módulo ou valor absoluto do número real x é indicado por |x| e definido pela relação

$$\begin{cases} |x| = x & \text{se } x \geq 0 \\ |x| = -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplo

$$|3| = 3, \text{ pois } 3 \geq 0$$
$$|-6| = 6, \text{ pois } -6 < 0$$

Resumidamente, o módulo "transforma" um número negativo em positivo.

FUNÇÃO MÓDULO

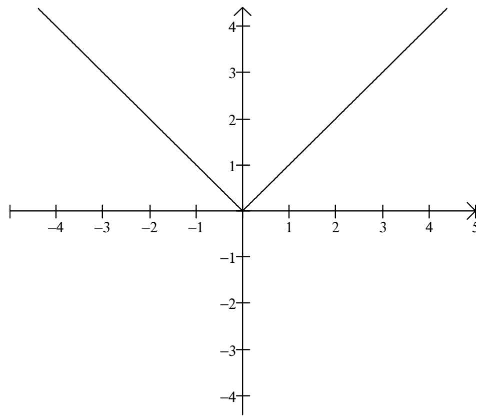
Uma função da forma

$$f(x) = |x|$$

com $x \in \Re$, é chamada função módulo.

GRÁFICO

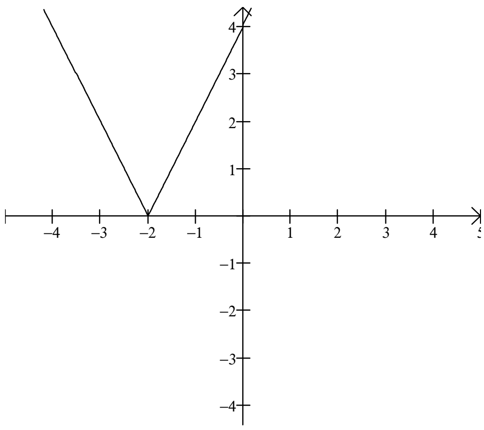
Veja o gráfico de $f(x) = |x|$. Pela própria definição, $f(x) = x$ quando $x \geq 0$ e $f(x) = -x$ quando $x < 0$.



Agora vamos construir o gráfico de $f(x) = |2x + 4|$.
Sabemos que

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{se } 2x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ -2x - 4 & \text{se } 2x + 4 < 0 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$$

Então:



EXERCÍCIO

1. Esboce o gráfico de:
a) $f(x) = |x - 2|$
b) $f(x) = |3x - 6|$
c) $f(x) = |8 + 2x|$
d) $f(x) = |\sqrt{3}x - \sqrt{12}|$
e) $f(x) = |-x|$
f) $f(x) = -|x|$
g) $f(x) = |x^2 - 4|$
h) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$
i) $f(x) = |x - 4| - 2$
j) $f(x) = |9 - x^2| + 1$
k) $f(x) = |x| + x + 1$
l) $f(x) = |x + 1| + |x + 2|$

EQUAÇÕES MODULARES

Se $a \in \Re$ e $a > 0$, então

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = -a$$

Exemplo

Resolva as equações:

a) $|2x-6|=4$

$$\begin{array}{ccc} 2x-6=4 & & 2x-6=-4 \\ 2x=10 & \text{ou} & 2x=2 \\ x=5 & & x=1 \end{array}$$

Então, $S=\{1,5\}$.

b) $|3x-9|=|6x+3|$

$$\begin{array}{ccc} 3x-9=6x+3 & & 3x-9=-(6x+3) \\ 3x=-12 & \text{ou} & 9x=6 \\ x=-4 & & x=\frac{2}{3} \end{array}$$

Então, $S=\left\{-4,\frac{2}{3}\right\}$

c) $|2x+1|=x-3$

$$\begin{array}{ccc} & & 2x+1=-(x-3) \\ 2x+1=x-3 & & 2x+1=-x+3 \\ x=-4 & \text{ou} & 3x=2 \\ & & x=\frac{2}{3} \end{array}$$

Mas $x=-4$ não convém, pois se substituirmos na equação dada teremos $|-7|=-7$, o que é um absurdo pois sabemos que $|-7|=7$.

Então, $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

EXERCÍCIO

2. Resolva as equações em R.

a) $|x|=5$

b) $|x-1|=3$

c) $|2x-8|=14$

d) $|3x+9|=x+15$

e) $|5x+10|=|10x+5|$

f) $|x|=x$

FUNÇÃO COMPOSTA

Seja g uma função de um conjunto A em um conjunto B e seja f uma função de B em um conjunto C. Então a função indicada por $f\circ g$ é dita f composta com g e aplicando x temos:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

para todo $x\in A$.

EXERCÍCIOS

3. (UFMG) Sejam f e g funções reais de variável real dadas por $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ e $g(x)=\frac{1}{x(x-2)}$. O maior subconjunto dos números reais onde pode ser definida a composta $g\circ f$ é:

a) $\Re-\{1,5\}$

b) $\Re-\{-5,-2,1\}$

c) $\Re-\{0,2\}$

d) $\Re-\{-5,-2,0,1,2\}$

e) $\Re-\{-2,0,2\}$

4. UFV) A função $f:\Re\to\Re$ é dada por $f(x)=ax+b$, com $a>0$. Se $f(f(x))=x$, então:

a) a = 2 e b = 0
b) a = 1 e b = 0
c) a = 2 e b = 1
d) a = 2 e b = 2
e) a = 1 e b = 2

5. (UFPA) Dadas as funções f e g de $\Re$ em $\Re$ definidas por $f(x)=x^2-x$ e $g(x)=x+1$, qual das funções abaixo representa $(f\circ g)(x)$?

a) x^2+1

b) x^2-x+1

c) x^2-1

d) x^2+2x+1

e) x^2+x

6. (UECE) Sejam f e g funções de $\Re$ em $\Re$ definidas por:

$$f(x)=x^2-1 \text{ e } g(x)=3x+1,$$

onde $\Re$ é o conjunto dos números reais.

Então o valor de $f(g(1))+g(f(1))$ é:

a) 15
b) 16
c) 17
d) 18

7. (PUC) Se $f(x)=3x-4$ e $f(g(x))=x+4$, então $g(1)$ vale:

a) – 2
b) 0
c) 1
d) 3
e) 5

8. (UFMG) Seja $A=\{0,1,2,3,4\}$ e $f:A\to A$ uma função dada por $f(x)=x+1$ se $x\neq 4$ e $f(4)=1$. O número $x\in A$ tal que $(f\circ f\circ f\circ f)(x)=2$ é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

9. (FATEC) Seja a função f tal que $f:(\Re-\{-2\})\to\Re$, onde $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$.

O número real x que satisfaz $f(f(x))=-1$ é:

a) – 4
b) – 2
c) 2
d) 4
e) n.d.a.

10. (MACK) Se $f(g(x)) = 2x^2 - 4x + 4$ e $f(x-2) = x + 2$, então o valor de $g(2)$ é:
a) – 2
b) 2
c) 0
d) 6
e) 14

FUNÇÃO SOBREJETORA

Uma função *f* de A em B é sobrejetora se, e somente se, para todo y pertencente a B existe um elemento x pertencente a A tal que

$$f(x) = y.$$

Exemplo

Sejam os conjuntos $A = \{-2,-1,0,1,\}$ e $B = \{-1,0,3\}$. Se f é uma função de A em B $(f : A \to B)$ definida pela lei $f(x) = x^2 - 1$ então f é sobrejetora, pois para qualquer $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $y = x^2 - 1$.

FUNÇÃO INJETORA

Uma função f de A em B é injetora se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Exemplos

1) Sejam os conjuntos $A = \{1,2,4\}$ e $B = \{-1,1,5\}$. Se f é uma função de A em B $(f : A \to B)$ definida pela lei $f(x) = 2x - 3$ então f é injetora pois para cada par de elementos diferentes de A relaciona um par de elementos diferentes de B.

2) Seja $f : \Re \to \Re$ uma função definida pela lei $f(x) = x^2$. Podemos concluir que f **NÃO** é injetora, pois $-1 \neq 1$ mas $f(-1) = f(1) = 1$.

FUNÇÃO BIJETORA

Uma função *f* de A em B é bijetora se, e somente se, *f* é sobrejetora e injetora.

FUNÇÃO INVERSA

Função inversa de uma função bijetora $f : A \to B$ é a função $f^{-1} : B \to A$.

Exemplo

Se *f* é dada por $f(x) = 2x - 4$, qual é sua função inversa?

Temos que $f(x) = y = 2x - 4$

1º passo: Trocamos x por y, então $x = 2y - 4$

2º passo: Expressamos y em função de x: $y = \dfrac{x+4}{2}$

Portanto a função inversa de *f* é a função f^{-1} definida por $f^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{2}$.

EXERCÍCIOS

11. (UFV) Considere a função *f* definida por $f(x) = 10x + 3$, $x \in \Re$. Seja *g* a função inversa de *f*. Então, $g(-7)$ é:
a) – 1
b) 1
c) 3
d) – 2
e) 2

12. (UFMG) O valor de *a*, para que a função inversa de $f(x) = 3x + a$ seja $g(x) = \dfrac{x}{3} - 1$ é:
a) – 3
b) $-\dfrac{1}{3}$
c) $\dfrac{1}{3}$
d) 1
e) 3

13. (UFPR) Dada a função *g* definida por $g(x) = x + 4$ para todo valor real de x, então a função g^{-1}, inversa de *g*, é definida por:
a) $g^{-1}(x) = x^{-1} - 4$
b) $g^{-1}(x) = x^{-1} + 4$
c) $g^{-1}(x) = \dfrac{1}{x+4}$
d) $g^{-1}(x) = x - 4$
e) $g^{-1}(x) = [g(x)]^{-1}$

14. (FATEC) Seja a função $f : \Re \to \Re$ definida por $f(x) = 3x + 4$ e f^{-1} sua inversa. Os gráficos de *f* e f^{-1}:
a) são coincidentes.
b) não têm pontos comuns.
c) interceptam-se em dois pontos.
d) interceptam-se somente no ponto $(-2,-2)$.
e) interceptam-se somente no ponto $\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$

4. FUNÇÃO EXPONENCIAL

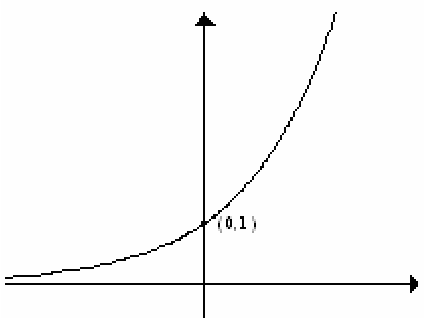
DEFINIÇÃO

A função f de $\Re$ em $\Re$ definida por $f(x) = a^x$, com o número real *a*, tal que $a > 0$ e $a \neq 1$ é chamada de função exponencial de base *a*.

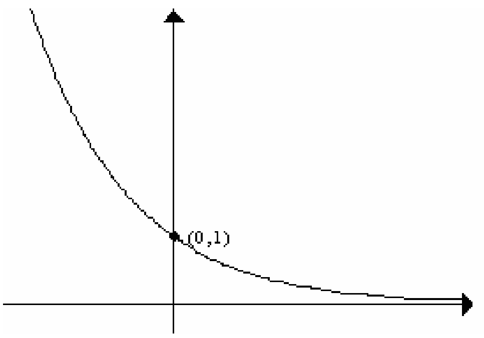
GRÁFICOS

Existem basicamente dois casos para as funções exponenciais: crescentes ou decrescentes.

1) $f(x) = a^x$, para $a > 1$. Neste caso, a função é crescente. Veja:

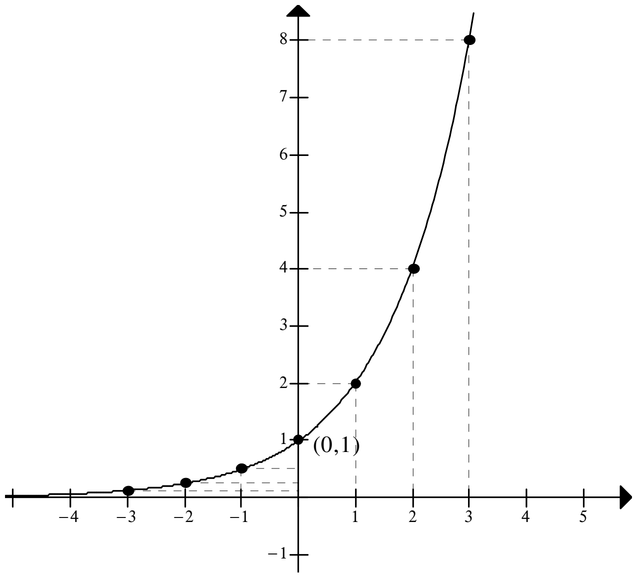


2) $f(x) = a^x$, para $0 < a < 1$. Neste caso, a função é decrescente. Observe:



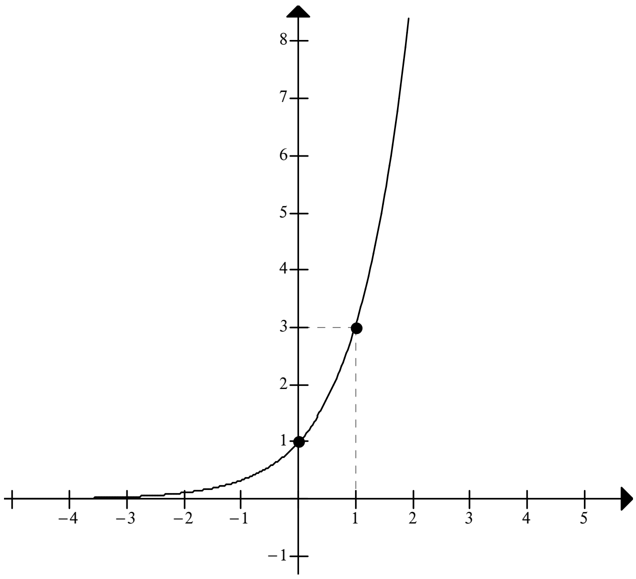
Podemos construir o gráfico de uma função exponencial achando alguns de seus pontos, por exemplo, para construirmos o gráfico de $f(x) = 2^x$ podemos fazer a seguinte tabela:

• $y = 2^x$	• 8	• 4	• 2	• 1	• $\frac{1}{2}$	• $\frac{1}{4}$	• $\frac{1}{8}$
• x	• 3	• 2	• 1	• 0	• -1	• -2	• -3



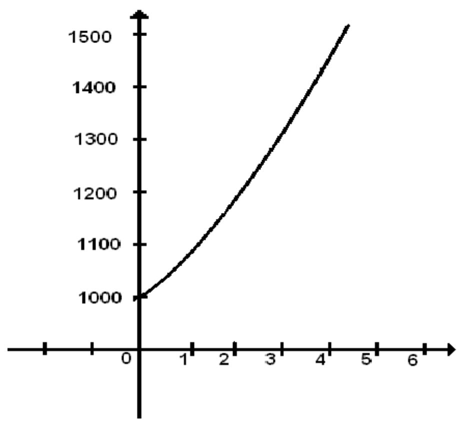
Exemplos

1) Um garoto recebeu uma carta com a frase: "Você deverá escrever mais 3 cartas como esta e mandá-las para 3 pessoas, se não escrever, terá azar!". Com receio, o garoto escreveu para mais 3 pessoas. Considerando que todas as pessoas que recebam uma carta façam o mesmo, teremos a função $f(x) = 3^x$, que descreve o número de cartas escritas, onde x é o número de envios destas cartas, e seu gráfico é crescente como podemos observar logo abaixo:



<u>Observação</u>: consideramos o gráfico acima apenas para $x > 0$.

2) Um banco emprestou R$1000,00 para José da Silva com uma taxa de juros mensal de 10%, então a função que descreve o quanto José deve ao banco em milhares de reais é $f(x) = 1{,}1^x$, onde x é o número de meses após o empréstimo.



Observação: Apesar de parecer uma reta, o gráfico anterior possui uma curvatura. Isso se deu pois os eixos não estão na mesma escala. Faça as contas e verifique.

EXERCÍCIOS

1. Construa os gráficos das seguintes funções em $\Re$:

a) $f(x)=3^x$

b) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $f(x)=2^{1-x}$

d) $f(x)=2^x+2$

2. (UFCE) Se $f(x)=16^{1+\frac{1}{x}}$, então $f(-1)+f(-2)+f(-4)$ é igual a:
a) 11
b) 13
c) 15
d) 17

3. (PUCRS) Seja a função $f:\Re\to\Re$ definida por $f(x)=2^x$. Então, $f(a+1)-f(a)$ é igual a:
a) 2
b) 1
c) $f(a)$
d) $f(1)$
e) $2f(a)$

4. (PUC-MG) Os valores de $a\in\Re$ que tornam a função exponencial $f(x)=(a-3)^x$ decrescente são:
a) $a<3$
b) $0<a<3$
c) $3<a<4$
d) $a<3$ e $a\neq 0$
e) $a>3$ e $a\neq 4$

5. (PUC-SP) Sejam $f(x)=3^{x-1}$, $g(x)=3^x$ e $s(x)=f(x)+g(x)$. Qual o valor de *x*, tal que $s(x)=4$.
a) -1
b) 0
c) 1
d) 2
e) 3

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Chamamos equação exponencial toda equação que contém, no expoente, pelo menos uma incógnita.

A resolução da equação consiste em obter potências de mesma base, tanto no primeiro membro, como no segundo.

Vale lembrar que serão usadas aqui as propriedades da potenciação, porém, se reduzirmos a uma base a com $a\in\Re$, a deve satisfazer as seguintes condições: $a>0$ e $a\neq 1$.

Exemplos

a)

$$2^x=8$$
$$2^x=2^3$$
$$x=3\Rightarrow S=\{3\}$$

b)

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x=64$$
$$\left(4^{-1}\right)^x=4^3$$
$$4^{-x}=4^3$$
$$-x=3$$
$$x=-3\Rightarrow S=\{-3\}$$

c)

$$2^{x+1}+2^{x-1}=80$$
$$2^x\cdot 2+2^x\cdot 2^{-1}=80$$
$$2^x\left(2+\frac{1}{2}\right)=5\cdot 2^4$$
$$2^x\cdot\frac{5}{2}=5\cdot 2^4$$
$$2^x=\frac{2\cdot 5\cdot 2^4}{5}$$
$$2^x=2^5$$
$$x=5\Rightarrow S=\{5\}$$

EXERCÍCIOS

6. Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $2^x=256$

b) $6^x=\frac{1}{216}$

c) $100^x=1000$

d) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^x=\sqrt[3]{9}$

e) $\left(3^x\right)^x=9^8$

7. Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $3^{2x-1}\cdot 9^{3x+4}=27^{x+1}$

b) $\left(9^{x+1}\right)^{x-1}=3^{x^2+x+4}$

c) $2^{3x}+2^{3x+1}+2^{3x+2}+2^{3x+3}=240$

8. (CESGRANRIO) O número de raízes reais de $3^{2x^2-7x+5}=1$ é:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) mais que 3

9. (FGV) A equação $4^x+6^x=2\cdot 9^x$ tem como solução o conjunto:
a) $\{1\}$
b) $\{2\}$
c) $\{3\}$
d) $\{0\}$
e) n.d.a

10. A solução da equação $3^{2x} - 6 \cdot 3^{x} + 9 = 0$ é:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

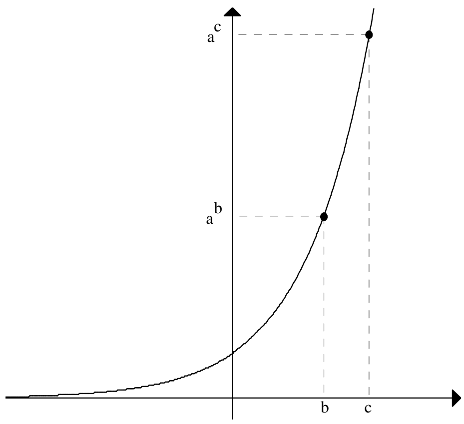
As inequações exponenciais são inequações com incógnita no expoente.

Para resolvermos as inequações exponenciais começaremos com o método usado nas equações exponenciais, deixaremos os dois membros da inequação com uma mesma base *a*, lembrando que $a \in \Re_{+}^{*} - \{1\}$.

Como há dois casos de função exponencial $f(x) = a^{x}$, se $a > 1$ a função será crescente e se $0 < a < 1$ a função será decrescente. Há duas regras como consequência; considerando dois números reais *b* e *c*, temos:

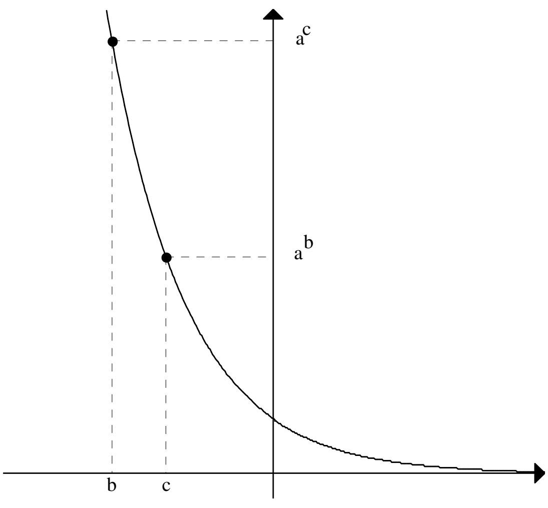
1) Se $a > 1$, então $a^{b} > a^{c} \Leftrightarrow b > c$

Neste caso, o sentido da desigualdade se conserva.



2) Se $0 < a < 1$, então $a^{b} > a^{c} \Leftrightarrow b < c$

Neste caso, o sentido da desigualdade se inverte.



EXERCÍCIOS

11. (UFV) O conjunto solução da inequação $5^{(x^{2}-3x+2)} > 1$, é:
a) $\{x \in \Re / x < 1\_ou\_x > 2\}$
b) $\{x \in \Re / x < 0\}$
c) $\{x \in \Re / x < 1\_e\_x > 2\}$
d) $\{x \in \Re / 1 < x < 2\}$
e) $\{x / x \in \Re\}$

12. O domínio da função real $y = \sqrt{(1,4)^{x^{2}-5} - \frac{5}{7}}$ é:
a) $\{x \in \Re / x \leq -2\_ou\_x \geq 2\}$
b) $\{x \in \Re / x \neq 2\}$
c) $\{x \in \Re / -2 \leq x \leq 2\}$
d) $\{x \in \Re / x \neq -2\}$
e) $\{x \in \Re / x \geq -2\}$

13. Resolva as inequações exponenciais abaixo:
a) $3^{x+5} - 3^{x+4} + 3^{x+3} - 3^{x+2} < 540$
b) $3^{2x+1} - 9^{x} - 3^{2x-1} - 9^{x-1} \leq 42$
c) $4^{x} - 6 \cdot 2^{x} + 8 < 0$
d) $2^{2x} - 2^{x+1} - 8 \leq 0$
e) $3(3^{x} - 1) \geq 1 - 3^{-x}$

5. LOGARITMOS

Chamamos logaritmo de b na base a o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b, sendo a e b reais e positivos, com $a \neq 1$, então:

$$\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$$

Observação: quando omite-se o número a (a base do logaritmo de b), subentende-se que $a = 10$, por exemplo:

$$\log 100 = x$$
$$10^x = 100$$
$$x = 2$$

Podemos descrever o logaritmo com o seguinte raciocínio: qual é o número que devemos elevar o número a para resultar b?

Exemplos

1) Qual é o número que devemos elevar o número 2 para resultar 16?
Para acharmos este número, fazemos uso da equação exponencial:

$$2^x = 16$$
$$2^x = 2^4$$
$$x = 4$$

O número 4 é denominado logaritmo de 16 na base 2. Escrevemos isto da seguinte forma: $\log_2 16 = 4$

2) Qual é o número que devemos elevar o número 3 para resultar $\frac{1}{27}$?

$$3^x = \frac{1}{27}$$
$$3^x = 3^{-3}$$
$$x = -3$$

O número -3 é denominado logaritmo de $\frac{1}{27}$ na base 3, então: $\log_3\left(\frac{1}{27}\right) = -3$

CONSEQUÊNCIAS DA DEFINIÇÃO

a) $\log_a 1 = 0$
b) $\log_a a = 1$
c) $\log_a a^x = x$
d) $a^{\log_a b} = b$
e) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

1) Logaritmo do produto $\boxed{\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c}$

2) Logaritmo do quociente $\boxed{\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c}$

3) Logaritmo da potência $\boxed{\log_a b^c = c \cdot \log_a b}$

EXERCÍCIOS

1. (UFCE) Se $\log_p 8 = -\frac{3}{4}$ e $\log_{32} q = \frac{3}{5}$, então $q + \frac{1}{p}$ é igual a:
a) 21
b) 22
c) 23
d) 24

2. (UFMG) Para todos os números reais a e b, não se pode afirmar que:
a) $\log a^2 = 2\log a$
b) $\log(1+a^2)^2 = 2\log(1+a^2)$
c) $\log(ab) = \log a + \log b$
d) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$
e) $\log a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\log a}$

3. (PUC-MG) Se $\log_a b = -2$ e $ab = 3$, então $b - a$ é igual a:
a) $\frac{20}{3}$
b) $\frac{22}{3}$
c) $\frac{23}{6}$
d) $\frac{25}{9}$
e) $\frac{26}{3}$

4. (UECE) Se $K = \log_5(6+\sqrt{35})$, então $5^K + 5^{-K}$ é igual a:
a) 6
b) 8
c) 12
d) 16

5. (FUVEST) Sabendo que $5^p = 2$, podemos concluir que $\log_2 100$ é igual a:
a) $\frac{2}{p}$
b) $2p$
c) $2 + p^2$
d) $2 + 2p$
e) $\frac{2+2p}{p}$

6. (U.C.-Salvador) Indica-se por $\log x$ o logaritmo de um número x na base 10. Se $\log 2 = a$, o valor de $\log 25$ é:
a) $\frac{a}{4}$
b) $\frac{a}{2}$
c) $4a$
d) $1 - a$
e) $2 - 2a$

7. (FUVEST) Sendo $\log_a 2 \cong 0{,}69$ e $\log_a 3 \cong 1{,}10$, calcule $\log_a \sqrt[4]{12}$.

8. (FUVEST) Se $\log_{10} 8 = a$, então $\log_{10} 5$ vale

a) a^3
b) $5a-1$
c) $\frac{2a}{3}$
d) $1+\frac{a}{3}$
e) $1-\frac{a}{3}$

MUDANÇA DE BASE

As propriedades dos logaritmos que vimos até agora são apenas aplicáveis quando suas bases forem iguais. Quando trabalharmos com bases diferentes, talvez seja importante mudar esta base para uma que nos seja conveniente. Para isso, usamos a seguinte propriedade de mudança de base:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Onde c é um número real maior que zero e diferente de 1.

Exemplos

1) Converta $\log_3 7$ para a base 4. $\log_3 7 = \frac{\log_4 7}{\log_4 3}$

2) Converta $\log_8 6$ para a base 6. $\log_8 6 = \frac{\log_6 6}{\log_6 8} = \frac{1}{\log_6 8}$

3) Converta $\log_5 100$ para a base 10. $\log_5 100 = \frac{\log_{10} 100}{\log_{10} 5} = \frac{2}{\log 5}$

CONSEQUÊNCIAS DA MUDANÇA DE BASE

a) Sendo a e b números reais positivos e diferentes de 1, temos:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\boxed{\therefore \log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

b) Sendo a e b números reais positivos e diferentes de 1 e β também real e diferente de zero, temos:

$$\log_{a^\beta} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^\beta} = \frac{\log_a b}{\beta \cdot \log_a a} = \frac{\log_a b}{\beta}$$

$$\boxed{\therefore \log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \cdot \log_a b}$$

EXERCÍCIOS

9. (FGV) O produto $(\log_9 2)(\log_2 5)(\log_5 3)$ é:

a) 0
b) $\frac{1}{2}$
c) 10
d) 30
e) $\frac{1}{10}$

10. PUC-SP) Se $m = \log_b a$, $m \neq 0$, então $\log_{\frac{1}{a}} b^2$ vale:

a) $-m$
b) $m+2$
c) m^2
d) $-\frac{2}{m}$
e) $-\frac{1}{m}$

11. (FUVEST) Se $x = \log_4 7$ e $y = \log_{16} 49$, então $x - y$ é igual a:

a) $\log_4 7$
b) $\log_{16} 7$
c) 1
d) 2
e) 0

12. (MACK) Se $\log_a x + \log_{\frac{1}{a}} x = y$, então y vale:

a) 1
b) $1/a$
c) 0
d) $2 \cdot \log_a x$
e) a

EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Para resolvermos uma equação logarítmica, devemos encontrar os valores da incógnita que tornam a equação verdadeira. No entanto, é sempre importante verificar as condições de existência.

Essas condições de existência partem da própria definição, ou seja, se tivermos x como logaritmo de b na base a ($\log_a b = x$), então as seguintes condições devem ser satisfeitas:

1) $b > 0$
2) $a > 0$ e $a \neq 1$

Exemplos

1) $\log_2(x+1) = \log_2(x^2-1)$

Podemos indicar a condição de existência por CE. Neste caso, como a base 2 é maior que zero e diferente de 1, precisamos apenas dar condições para que os logaritmandos $x+1$ e x^2-1 sejam maiores que zero:

$$\text{CE}\begin{cases} x+1>0 \Rightarrow x>-1 \\ x^2-1>0 \Rightarrow x<-1 \text{ ou } x>1 \end{cases}$$

Resolução:

$$\log_2(x+1) = \log_2(x^2-1)$$
$$x+1 = x^2-1$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x = -1 \text{ ou } x = 2$$

Pelas condições de existência, sabemos que $x > 1$, portanto excluímos o valor obtido $x = -1$, concluindo que o conjunto solução da equação é:

$$S = \{2\}$$

2) $\log_{m-3} 8 = 1$

Neste caso, como o logaritmando é positivo, precisamos verificar as condições de existência da base:

$$\text{Condições de Existência: } \begin{cases} m-3>0 \\ m>3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{matrix} m-3 \neq 1 \\ m \neq 4 \end{matrix}$$

Resolução:

$$\begin{aligned} \log_{m-3} 8 &= 1 \\ m-3 &= 8 \\ m &= 11 \end{aligned}$$

Como o valor de m encontrado satisfaz as condições de existência, concluímos que $m = 11$, então:

$$S = \{11\}$$

3) $\log_{3x+2}(2x-1) = 1$

Como tanto a base como o logaritmando contém incógnita, verificamos as suas condições de existência:

$$\text{CE} \begin{cases} 2x-1>0 & & 3x+2>0 & & 3x+2\neq 1 \\ 2x>1 & \text{e} & 3x>-2 & \text{e} & 3x \neq -1 \\ x>\dfrac{1}{2} & & x>-\dfrac{2}{3} & & x\neq -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{aligned} \log_{3x+2}(2x-1) &= 1 \\ 3x+2 &= 2x-1 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

O valor de x encontrado não satisfaz as três condições de existências, então concluímos que o seu conjunto solução é:

$$S = \varnothing$$

EXERCÍCIOS

13. Resolva as seguintes equações:
a) $\log_2 32 = x$
b) $\log_x \dfrac{1}{81} = -4$
c) $\log_3\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right) = 1$
d) $\log_4\left(-x^2+5x\right) = \log_4 6$

14. (CESGRANRIO) Se $\log x$ representa o logaritmo decimal do número positivo x, a soma das raízes de $\log^2 x - \log x^2 = 0$ é:
a) -1
b) 1
c) 20
d) 100
e) 101

15. UNIFOR) O conjunto solução da equação $(\log x)^2 - 2\cdot\log x + 1 = 0$, no universo $\Re$, é:
a) $\{0\}$
b) $\{0,1\}$
c) $\{1\}$
d) $\{10\}$
e) $\{100\}$

16. (PUC-Campinas) O valor de x, tal que $\log_4\left(\dfrac{1}{\log_x 4}\right) = \dfrac{1}{2}$, é:
a) 4
b) $\dfrac{1}{2}$
c) 10
d) 1
e) n.d.a.

17. (UEL) A solução da equação $\log_3(3-\log_2 x) = 0$, em $\Re$, é um número:
a) fracionário.
b) primo.
c) divisível por 5.
d) múltiplo de 3.
e) divisível por 2.

18. (MACK) Seja k a solução da equação $2^{\log_8 \log_2 x} = \dfrac{1}{2}$. O valor de k^8 é igual a:
a) $\dfrac{1}{8}$
b) $\dfrac{1}{4}$
c) $\dfrac{1}{2}$
d) 1
e) 2

19. (PUCRS) O conjunto solução da equação $\log_x(10+3x) = 2$, em $\Re$, é:
a) $\varnothing$
b) $\{-2\}$
c) $\{5\}$
d) $\{-2,5\}$
e) $\{-5,2\}$

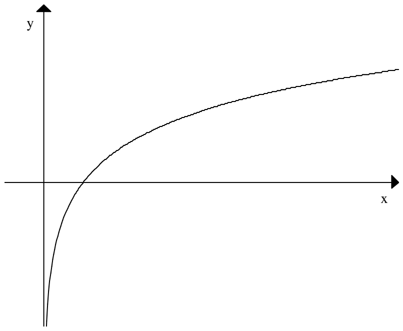
FUNÇÃO LOGARÍTMICA

DEFINIÇÃO: chamamos função logarítmica de base a, sendo a um real positivo e diferente de 1, a função f de $\Re_+^*$, em $\Re$, que associa a cada x o número $\log_a x$.

GRÁFICOS DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

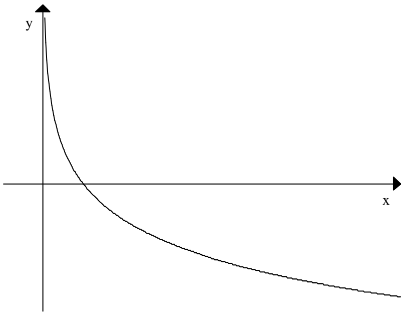
a) $f(x) = \log_a x$, para $a > 1$

Neste caso, o gráfico da função será crescente.



b) $f(x) = \log_a x$, para $0 < a < 1$.

Neste caso, o gráfico da função será decrescente.

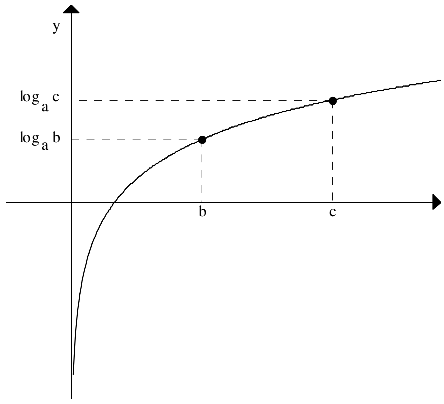


Observação: sempre o gráfico da função logarítmica interceptará o eixo x na coordenada 1.

INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

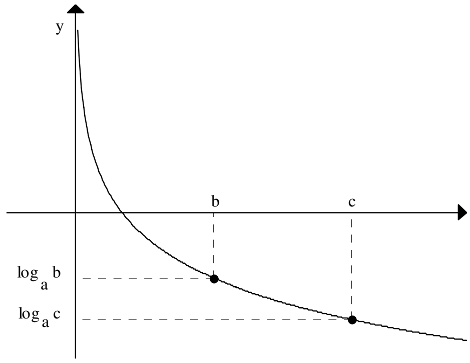
Considerando os reais b e c pertencentes ao domínio de $f(x) = \log_a x$, e observando os gráficos a seguir, podemos afirmar que:

1) sendo $a > 1$ (crescente) teremos a seguinte relação:



$$\boxed{b < c \Leftrightarrow \log_a b < \log_a c}$$

2) sendo $0 < a < 1$ (decrescente), teremos a seguinte relação:



$$\boxed{b < c \Leftrightarrow \log_a b > \log_a c}$$

Para resolvermos uma inequação logarítmica devemos sempre observar as condições de existência e usarmos as duas relações citadas acima.

Exemplo

1) Resolva as seguintes inequações:

a) $\log_4 (3x - 3) \le \log_4 3$

$$\boxed{\text{CE}\begin{cases} 3x - 3 > 0 \\ x > 1 \end{cases}}$$

Como a base 4 é maior que 1, o sentido da desigualdade se conserva.

$$3x - 3 \le 3$$
$$3x \le 6$$
$$x \le 2$$

Se, pela condição de existência, temos que $x > 1$, e resolvendo a inequação obtemos que $x \le 2$, concluímos que $1 < x \le 2$, então: $S = \{x \in \Re / 1 < x \le 2\}$.

b) $\log_{\frac{1}{3}} 21 > \log_{\frac{1}{3}}(7x+14)$

Pela condição de existência:

$$7x + 14 > 0$$
$$7x > -14$$
$$x > -2$$

Como $0 < \frac{1}{3} < 1$, o sentido da desigualdade se inverte.

$$\log_{\frac{1}{3}} 21 > \log_{\frac{1}{3}}(7x+14)$$
$$21 < 7x + 14$$
$$7 < 7x$$
$$1 < x$$
$$x > 1$$

Como temos duas condições, $x > -2$ e $x > 1$, a intersecção desses dois intervalos será $x > 1$, então:

$$S = \{x \in \Re / x > 1\}$$

Exercícios

20. (UFMG) O conjunto de todos os números reais *x*, para os quais $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\log(2-x)}}$ está definida, é:

a) $S = \{x \in \Re / x < 1\}$
b) $S = \{x \in \Re / x > 1\}$
c) $S = \{x \in \Re / x < 2\_e\_x \neq 1\}$
d) $S = \{x \in \Re / 0 < x < 2\}$
e) $S = \{x \in \Re / x > 0\}$

21. (PUC-MG) O domínio da função $f(x) = \log_5(-x^2 + 3x + 10)$ é:

a) $\Re^*$
b) $\Re^*_+$
c) $S = \{x \in \Re / x \neq -2 \text{ e } x \neq 5\}$
d) $S = \{x \in \Re / x < -2 \text{ ou } x > 5\}$
e) $S = \{x \in \Re / -2 < x < 5\}$

22. (MACK) O menor valor natural de *n* para o qual se tem $\dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot ... \cdot 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot n} > \sqrt{\log 10^{100}}$ é:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 10
e) 100

23. (MACK) O conjunto solução da inequação $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + x - 2) \geq -2$ é:

a) $S = \{x \in \Re / -3 \leq x < -2\_ou\_1 < x \leq 2\}$
b) $S = \{x \in \Re / -3 < x < -2\_ou\_1 < x < 2\}$
c) $S = \{x \in \Re / -3 < x \leq -2\_ou\_1 \leq x < 2\}$
d) $S = \{x \in \Re / -3 \leq x \leq -2\_ou\_1 \leq x \leq 2\}$
e) n.d.a.

24. (UEMT) O conjunto solução da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 x} < \left(\frac{1}{2}\right)^3$ é:

a) $S = \{x \in \Re / x = 8\}$
b) $S = \{x \in \Re / x < 8\}$
c) $S = \{x \in \Re / x < 3\}$
d) $S = \{x \in \Re / x > 3\}$
e) $S = \{x \in \Re / x > 8\}$

25. (MACK) Se $\log_a 3 > \log_a 5$, então:

a) $a < -1$
b) $-1 < a < 0$
c) $0 < a < 1$
d) $1 \leq a < 2$
e) $a > 3$

26. (FCChagas) A solução da inequação $\log_{10}(x^2 - 2x + 1) < 2$ é:

a) $-11 < x < 9$
b) $-9 < x < 11$
c) $-9 < x < 1$ ou $1 < x < 11$
d) $1 \leq x < 11$
e) $0 < x < 1$ ou $x > 1$

6. MATRIZES

Matrizes são tabelas de números reais usadas em quase todos os ramos do conhecimento.

Veja abaixo um exemplo de uma tabela de 4 linhas por 3 colunas, que representa o Produto Interno Bruto (PIB) de 4 países em 3 anos.

- Parcela do PIB gerada pela Indústria (%):

	1970	1990	2000
Estados Unidos	32	21	19
Japão	36	29	23
Alemanha	38	31	27
Reino Unido	28	20	17

- Fonte: FMI

Se quisermos verificar o PIB da Alemanha no ano de 1990, precisaremos procurar na linha 3 e coluna 2 da tabela, onde encontraremos o número 31.

Essa tabela pode ser escrita como matriz das seguintes formas:

$$A=\begin{pmatrix}32&21&19\\36&29&23\\38&31&27\\28&20&17\end{pmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}32&21&19\\36&29&23\\38&31&27\\28&20&17\end{bmatrix}\quad C=\begin{Vmatrix}32&21&19\\36&29&23\\38&31&27\\28&20&17\end{Vmatrix}$$

Com isso, teremos que uma matriz $4\times 3\ (4\ por\ 3)$ é uma tabela de 4×3 (12 elementos) números reais dispostos em 4 linhas (filas horizontais) e 3 colunas (filas verticais).

REPRESENTAÇÃO DE UMA MATRIZ

Representamos as matrizes por letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas, acompanhadas por dois índices que indicam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa.

Portanto, representaremos a matriz A do tipo $m\times n$ por:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots\ \vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots a_{mn}\end{pmatrix}$$

ou, genericamente, por $A=(a_{ij})_{m\times n}$, em que i e j representam respectivamente, a linha e a coluna que ocupa. Por exemplo:

Na matriz $A=\begin{pmatrix}1&5\\2&3\end{pmatrix}$, os elementos serão: $a_{11}=1$; $a_{12}=5$; $a_{21}=2$; $a_{22}=3$.

Uma matriz A qualquer pode ser construída a partir da sua "lei de formação" como veremos no exemplo:

1) Construa uma matriz $A=(a_{ij})_{2\times 2}$, onde $a_{ij}=i+j$:

- uma matriz 2×2 pode ser genericamente representada por $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$.

Como sua lei de formação é $a_{ij}=i+j$, teremos:

$$a_{11}=1+1=2$$
$$a_{12}=1+2=3$$
$$a_{21}=2+1=3$$
$$a_{22}=2+2=4$$

Assim: $A=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}$

EXERCÍCIOS

1. Dada a matriz $A=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\5&6&7&8\\10&11&12&13\\15&16&17&18\end{bmatrix}$, escreva os valores dos elementos: a_{22}, a_{24}, a_{42}, a_{31}, a_{23}, a_{32}, a_{14}.

2. Construa a matriz $(a_{ij})_{2\times 3}$ tal que $(a_{ij})=i^2+j^2+1$

TIPOS DE MATRIZES

I) Matriz linha: é a matriz formada por uma única linha.

Exemplo:

$B=\begin{pmatrix}4&6&1&5\end{pmatrix}$ é uma matriz linha 1×4.

II) Matriz coluna: é a matriz formada por uma única coluna.

Exemplo:

$A=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$ é uma matriz coluna 3×1.

III) Matriz nula: é a matriz cujos elementos são todos iguais a zero.

Exemplos:

$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ é uma matriz nula 2×3

e

$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ é uma matriz nula 3×3.

IV) Matriz quadrada: é a matriz que possui número de linhas igual ao número de colunas.

Exemplos:

$A=\begin{pmatrix}2&-5&3\\\frac{15}{2}&7&5\\1&6&8\end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 3×3.

Dizemos que a matriz A é quadrada de ordem 3 ou de 3ª ordem.

$B=\begin{pmatrix}23&10&-15&20\\\frac{7}{5}&6&\sqrt[5]{8}&2\\5&3&-17&-15\\28&30&2&56\end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada 4×4.

Dizemos que a matriz B é quadrada de ordem 4 ou de 4ª ordem.

Numa matriz quadrada existem duas diagonais, a diagonal em que o número de linhas do índice dos elementos é igual ao número de colunas, que é chamada de diagonal principal e a outra, chamada de diagonal secundária.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ \frac{15}{2} & 7 & 5 \\ 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

diagonal secundária

diagonal principal

Na matriz A, a diagonal principal é composta pelos seguintes elementos: $a_{11} = 2$; $a_{22} = 7$; $a_{33} = 8$. Ou seja, $i = j$.

V) Matriz identidade ou matriz unidade: é a matriz onde todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são iguais a zero.

Exemplo:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analisando os exemplos conseguimos verificar que

$$I_n = \left(a_{ij}\right),\ a_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ i = j \\ 0, & se\ i \neq j \end{cases}.$$

VII) Matriz Oposta: a matriz $-$A é a matriz oposta de A e para obtê-la devemos multiplicar todos os elementos da matriz A por (-1).

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}, \text{ então } -A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -4 \\ -2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

VIII) Matriz Transposta: a matriz A^t é a matriz transposta de A e para obtê-la é necessário trocar ordenadamente as linhas por colunas, ou vice-versa.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}, \text{ então } A^t = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

IX) Matriz simétrica: é a matriz quadrada em que $A = A^t$.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \text{ é simétrica pois:}$$

$a_{12} = a_{21} = 7$; $a_{13} = a_{31} = 3$; $a_{23} = a_{32} = 1$, ou seja $a_{ij} = a_{ji}$.

IGUALDADE DE MATRIZES

Duas matrizes são iguais quando são de mesma ordem e todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais.

Exemplo

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x+y & 5 \\ 3x-y & 1 \end{bmatrix}$, calcular x e y para que $A = B$.

Resolução:

$$A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & 5 \\ 3x-y & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 2 & \longrightarrow y = 2 - x \\ 3x - y = 10 \end{cases}.$$

$$3x - (2 - x) = 10$$
$$4x = 10 + 2$$
$$x = \frac{12}{4} = 3$$

$$y = 2 - 3$$
$$y = -1$$

OPERAÇÕES COM MATRIZES

ADIÇÃO

Dadas duas matrizes A e B do mesmo tipo, chamaremos de matriz soma C de A e B, se seus elementos forem iguais à soma dos elementos das correspondentes matrizes A e B ($c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$).

$$A + B = C$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & -2 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 2+(-6) & 1+1 & 3+1 \\ -5+5 & 7+5 & 0+(-2) \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 0 & 12 & -2 \end{bmatrix}$$

SUBTRAÇÃO

Dadas duas matrizes A e B do mesmo tipo, chamaremos de matriz diferença C de A e B, se seus elementos forem iguais à soma dos elementos correspondentes de A, com os correspondentes da matriz oposta de B.

$$A - B = A + (-B) = C$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(-1) & -4 \\ -(-2) & -3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3-(-1) & 5-4 \\ -2-(-2) & 0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO

$A1)A+B=B+A$ (comutativa)
$A2)(A+B)+C=A+(B+C)$ (associativa)
$A3)A+0=A$ (elemento neutro)
$A4)A+(-A)=0$ (elemento oposto)

MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO REAL POR UMA MATRIZ

Para multiplicar uma matriz A por um número real, basta multiplicar todos seus elementos pelo número, e o resultado é uma matriz do tipo A.

Sendo k um número real qualquer:

$$B=kA$$

Exemplo

Dada a matriz $A=\begin{bmatrix}-2 & 5\\10 & 0\end{bmatrix}$, calcule o seu quíntuplo.

Resolução:

Para calcular o seu quíntuplo devemos multiplicar a matriz A por 5.

$$5\cdot\begin{bmatrix}-2 & 5\\10 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\cdot(-2) & 5\cdot5\\5\cdot10 & 5\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & 25\\50 & 0\end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS

3. Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}7 & -1\\0 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 8\\6 & 1\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}2 & -6\\-5 & -1\end{bmatrix}$. Calcule:

a) $A+B$

b) $B+C$

c) $A-C$

d) $C-B$

e) $A+C$

f) $A-B$

g) $B-C$

4. Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}$.

a) Calcule $2A+B-3C$;

b) Determine a matriz X, tal que $2X-A+3B=0$

5. (FATEC) Seja $A=\left(a_{ij}\right)$ a matriz real quadrada de ordem 2, definida por

$a_{ij}=\begin{cases}2^{i+j}\ para: i<j;\\ i^2+1\ para: i\geq j;\end{cases}$ então

a) $A=\begin{pmatrix}2 & 8\\5 & 5\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}2 & 8\\5 & 6\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\8 & 5\end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix}2 & 8\\2 & 5\end{pmatrix}$

e) n.d.a

6. (FEI) Se as matrizes $A=\left(a_{ij}\right)$ e $B=(b_{ij})$ estão assim definidas:

$\begin{cases}a_{ij}=1; se: i=j\\ a_{ij}=0; se: i\neq j\end{cases}$ $\begin{cases}b_{ij}=1; se: i+j=4\\ b_{ij}=0; se: i+j\neq 4\end{cases}$,

onde $1\leq i,j\leq 3$, então a matriz $A+B$ é:

a) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

7. (VUNESP-SP) Se A é uma matriz de ordem 2 por 3, definida pela lei:

$a_{ij} = \begin{cases} 0, se : i = j \\ 2i, se : i \neq j \end{cases}$, então A se escreve:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. Sejam $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & a^2 \\ -27 & \log_3 \frac{1}{81} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2^b & 9 \\ a^3 & c \end{bmatrix}$. Determine a, b e c para que $A = B$.

9. Resolva o sistema $\begin{cases} X + Y = A + B \\ X - Y = 2A - B \end{cases}$, sendo $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

10. (PUC) Se $A = \begin{pmatrix} 25 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}$ então a matriz X, tal que $A + B - C - X = 0$ é:

a) $\begin{pmatrix} 31 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 17 \\ -6 \\ 31 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -31 \\ -6 \\ -17 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 21 \\ -6 \\ 17 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 31 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Vamos inicialmente abordar multiplicação de matrizes através de um problema prático.

Uma doceira produz dois tipos de doces: doce de leite e doce de abóbora. Para a produção desses doces são utilizados três ingredientes: cravo, coco e canela, como veremos na tabela abaixo:

	Doce de leite	Doce de abóbora
Cravo	6	9
Coco	4	3
Canela	5	8

A tabela dada será representada pela matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Vamos supor que sejam fabricados 60 doces de leite e 30 doces de abóbora, por dia. Esta quantidade de doces pode ser representada pela matriz coluna B:

$$B = \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Se quisermos determinar a quantidade de ingredientes cravo, coco e canela utilizados por dia, procedemos da seguinte forma:

Cravo : $6 \cdot 60 + 9 \cdot 30 = 630$
Coco : $4 \cdot 60 + 3 \cdot 30 = 330$
Canela: $5 \cdot 60 + 8 \cdot 30 = 540$

Essas quantidades obtidas podem ser representadas pela matriz C:

$$C = \begin{bmatrix} 630 \\ 330 \\ 540 \end{bmatrix}$$

Podemos verificar com o exemplo dos doces que para obter o produto de duas matrizes, é preciso obter a soma dos produtos ordenados de uma linha da matriz A, pela coluna da matriz B.

Na multiplicação de duas matrizes A e B, o número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B, e o produto AB tem o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B.

Exemplo

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 + 8 & 3 + 4 \\ -3 + 16 & 9 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$$

PROPRIEDADES

A multiplicação de matrizes tem as seguintes propriedades, se existirem os produtos envolvidos:

$$M1)\ A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C \text{ (associativa)}$$

$$M2)\ A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C \text{ (distributiva à direita)}$$

$$M3)\ (B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A \text{ (distributiva à esquerda)}$$

OBSERVAÇÕES

I) A multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, existem matrizes A e B tais que $A\cdot B\neq B\cdot A$.

II) Se ocorrer $A\cdot B=B\cdot A$, dizemos que as matrizes A e B comutam.

III) Na multiplicação de matrizes não vale a lei do anulamento do produto, isto é, podemos ter $A\cdot B=0$, mesmo com $A\neq 0$ e $B\neq 0$.

IV) Não vale também a lei do cancelamento, isto é, podemos ter $A\cdot B=A\cdot C$, mesmo com $A\neq 0$ e $B\neq C$.

MATRIZ INVERSA

Dada uma matriz quadrada A de ordem n. Se o produto dessa matriz A por uma outra matriz de mesma ordem resultar na matriz identidade, chamaremos esta matriz de inversa de A e a representaremos por A^{-1}.

$$A\cdot A^{-1}=I$$

OBSERVAÇÕES

a) I é uma matriz identidade de mesma ordem que as matrizes A e A^{-1}.

b) Se existir a inversa, dizemos que a matriz A é <u>inversível</u> e, em caso contrário, <u>não inversível</u> ou <u>singular</u>.

c) Se a matriz quadrada A é <u>inversível</u>, ela é única.

Exemplo

Sendo a matriz $A=\begin{bmatrix}2&4\\1&5\end{bmatrix}$ determine sua inversa, se ela existir.

Resolução:

Fazemos $A^{-1}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$

Sabemos que $A\cdot A^{-1}=I_2$

$$\begin{bmatrix}2&4\\1&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2a+4c&2b+4d\\a+5c&b+5d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

Pela igualdade de matrizes, temos os seguintes sistemas:

$$I)\begin{cases}2a+4c=1\\a+5c=0\end{cases}\Rightarrow\ a=\frac{5}{6}\ \text{e}\ c=-\frac{1}{6}$$

$$II)\begin{cases}2b+4d=0\\b+5d=1\end{cases}\Rightarrow\ b=-\frac{2}{3}\ \text{e}\ d=\frac{1}{3}$$

Portanto: $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{6}&-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$.

EXERCÍCIOS

11. (FUVEST) Considere as matrizes:

$A=(a_{ij}),4\times 7$ onde $a_{ij}=i-j$

$B=(b_{ij}),7\times 9$ onde $b_{ij}=i$

$C=(c_{ij})$, tal que $C=AB$

O elemento c_{63}:

a) é -112
b) é -18
c) é -9
d) é -112
e) não existe

12. (FEI) Dadas as matrizes $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}$, para $A\cdot B$ temos:

a) $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

13. (MACK) A é uma matriz $m\times n$ e B é uma matriz $m\times p$. A afirmação falsa é:

a) $A+B$ existe se, e somente se, $n=p$.
b) $A=A^t$ implica $m=n$.
c) $A\cdot B$ existe se, e somente se, $n=p$.
d) $A\cdot B^t$ existe se, e somente se, $n=p$.
e) $A^t\cdot B$ sempre existe.

14. (CESGRANRIO) A Inversa da matriz $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ é:

a) $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

c) inexistente

d) $\begin{pmatrix} -1/4 & 1/3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

15. (FUVEST-99) Se as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são tais que $AB = BA$, pode-se afirmar que:

a) A é inversível

b) $\det A = 0$

c) $b = 0$

d) $c = 0$

e) $a = d = 1$

16. (VUNESP-99) Se A, B e C forem matrizes quadradas quaisquer de ordem *n*, assinale a única alternativa verdadeira.

a) $AB = BA$.

b) Se $AB = AC$, então $B = C$.

c) Se $A^2 = 0_n$ (matriz nula), então $A = 0_n$.

d) $(AB)C = A(BC)$.

e) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

17. (UFPA) Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{p\times m,}$, onde n, p e m são números distintos, qual das operações abaixo podemos efetuar?

a) $A + B$

b) $A \cdot B$

c) $B \cdot A$

d) $(A') \cdot B$

e) $(B') \cdot A$

18. (VUNESP-95) Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ assinale a matriz N que não comuta com M, isto é, aquela para a qual se tem $M \cdot N \neq N \cdot M$.

a) $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

e) $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

7. DETERMINANTES

A teoria dos determinantes surgiu quase simultaneamente na Alemanha, com Leibniz (1646-1716), e no Japão, com Seki Shinsuke Kowa (1642-1708), ao solucionarem um problema de eliminações necessárias à resolução de um sistema de m equações lineares, com m incógnitas.

Como vimos, a matriz quadrada é a que tem o mesmo número de linhas e colunas. Para toda matriz quadrada que está associada a um número real, damos o nome de determinante.

Dentre as inúmeras aplicações de determinantes na Matemática, destaca-se a resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares e o cálculo da área de um triângulo situado no plano cartesiano, quando são conhecidas as coordenadas dos seus vértices.

DETERMINANTE DE UMA MATRIZ DE 1ª ORDEM

Dada uma matriz quadrada de 1ª ordem $A = [a_{11}]$, o seu determinante é o próprio número real a_{11}:

$$\det A = |a_{11}|$$

Exemplos:

a) $A = [7] \Rightarrow \det A = 7$ b) $A = [-8] \Rightarrow \det A = -8$

DETERMINANTE DE UMA MATRIZ DE 2ª ORDEM

Dada a matriz quadrada de 2ª ordem

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

chama-se determinante associado à matriz A (ou determinante de 2º ordem), o número real obtido pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Generalizando, temos:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Exemplos

1) Achar o valor do determinante $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$

Resolução:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) - 6 \cdot (-3) = -4 + 18 = 14$$

Resposta: 14

2)Resolver a equação $\begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ x-1 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ x-1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5(x+3) - 2(x-1) = 0 \Rightarrow 5x + 15 - 2x + 2 = 0$$

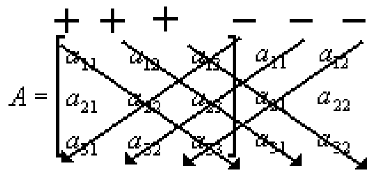
$$3x = -17 \Rightarrow x = -\frac{17}{3}$$

Resposta: $S = \left\{ -\frac{17}{3} \right\}$

DETERMINANTE DE UMA MATRIZ DE 3ª ORDEM

O determinante de uma matriz de 3ª ordem pode ser resolvido por uma regra prática denominada Regra de Sarrus.

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$



$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$$
$$+ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$
$$- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Exemplo

Calcular o valor do determinante $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Solução:

$\det A = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 \cdot 2 - (-3) \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \cdot 3 =$

$\det A = 2 - 18 - 8 - 3 - 8 - 12 = -47$

Resposta: -47

MENOR COMPLEMENTAR

Dada a matriz quadrada de 3ª ordem:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Chama-se menor complementar relativo a um elemento a_{ij} da matriz A, o determinante associado à matriz quadrada de 2ª ordem, obtida em A. Que é obtido eliminando, em A, a linha e a coluna que contém o elemento a_{ij} considerado. Usualmente indicado por D_{ij}, temos:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

eliminamos em A a linha 1 e a coluna 1.

Exemplo

Dada a matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, calcule D_{12}

Resolução:

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{-1} & \boxed{3} \\ 0 & \boxed{1} & 4 \\ 5 & \boxed{-2} & 1 \end{pmatrix}$$

Eliminamos a linha e a coluna dos elementos $a_{12}=-1$: $D_{12}=\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=-20$

COFATOR

Consideremos a matriz quadrada de 3ª ordem:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Se eliminarmos nessa matriz A a linha i e a coluna j, vamos obter uma matriz quadrada de 2ª ordem, cujo determinante é chamado menor complementar relativo ao elemento a_{ij}.

Chama-se cofator de a_{ij} o número real que se obtém multiplicando-se $(-1)^{i+j}$, pelo menor complementar de a_{ij}, e que é representado por A_{ij}. Então:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot D_{ij}$$

Portanto, se considerarmos a matriz quadrada A, temos:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot D_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

No caso acima, eliminamos a linha 1 e a coluna 1.

Exemplo:

Dada a matriz $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, calcule A_{13}.

Resolução:

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=28$$

TEOREMA DE LAPLACE

DEFINIÇÃO: o determinante de uma matriz quadrada de ordem $n\,(n\geq 2)$, é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) qualquer, por seus respectivos cofatores.

Seja a matriz:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{bmatrix},$$

então, escolhendo a primeira coluna temos:

$$\det A=a_{11}\cdot A_{11}+a_{21}\cdot A_{21}+\ldots+a_{n1}\cdot A_{n1}$$

Logo abaixo temos a demonstração do teorema para $n=3$:
Consideremos a matriz quadrada de 3ª ordem:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Define-se como determinante da matriz A o número:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det A=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-$$
$$-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$

Agrupando os termos que têm a_{11}, a_{12} e a_{13}, isto é, os elementos da 1ª linha, e colocando–os em evidência, vem:

$$\det A=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-$$
$$-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$$
$$\det A=a_{11}(a_{22}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{32})-$$
$$-a_{12}(a_{21}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{31})+a_{13}(a_{21}\cdot a_{32}-a_{22}\cdot a_{31})$$

$$\det A=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Em que: A_{11} é o cofator de a_{11};
A_{12} é o cofator de a_{12};
A_{13} é o cofator de a_{13}

Logo: $\det A=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}$

OBSERVAÇÃO: se agruparmos em $\det A$ os termos que contém os elementos a_{21}, a_{22} e a_{23}, isto é, os elementos da 2ª linha da matriz A, teremos:

$$\det A=a_{21}\cdot A_{21}+a_{22}\cdot A_{22}+a_{23}\cdot A_{23}$$

Assim, podemos utilizar estas fórmulas para calcular um determinante de 3ª ordem tomando como referência qualquer linha ou coluna da matriz A.

Exemplo

Calcular o determinante da matriz A, sendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolução:

Calcularemos o determinante pelos elementos da primeira coluna:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 14\,,\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5\,,\quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -17$$

$$\det A = 2 \cdot 14 + 0 \cdot (-5) + 6 \cdot (-17)$$
$$\det A = 28 + 0 - 102$$
$$\det A = -74$$

OBSERVAÇÃO: assim como foi escolhida a primeira coluna, poderíamos ter escolhido qualquer outra coluna ou linha do determinante.

Determinante de uma Matriz de Ordem Maior que 3

Seja a matriz quadrada de 4ª ordem:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Seu determinante será

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

Para o cálculo desse determinante, aplicaremos o Teorema de Laplace, até chegarmos a um determinante de 3ª ordem, e depois poderemos aplicar a Regra de Sarrus.

Assim, desenvolvendo o determinante acima pelos elementos da 1ª linha, teremos:

$$\det A = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Aplicando a regra de Sarrus, teremos:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 17 \quad D_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 44 \quad D_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -111$$

Portanto:

$$\det A = 2 \cdot 17 - 3 \cdot 44 - 1 \cdot (-111) = \ \det A = 34 - 132 + 111 = 13$$
$$\det A = 13$$

OBSERVAÇÃO: é importante que se escolha a linha ou a coluna com o maior número de zeros para economizar cálculos.

Exercícios

1. (VUNESP-2000) Dadas as matrizes A e B abaixo, o determinante da matriz $A \cdot B$ é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a) -1
b) 6
c) 10
d) 12
e) 14

2. (PUC-98) No universo C, a equação $\begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ -2 & x & 0 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = -2$ admite:

a) três raízes racionais.
b) duas raízes não reais.
c) duas raízes irracionais.
d) uma única raiz não inteira
e) uma única raiz positiva.

3. (Mack) A solução da equação $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & -1 & 5 \\ 2/3 & -1/2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ é:

a) 1
b) 58
c) −58
d) $\frac{67}{9}$
e) 2

4. (MACK) Sendo $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem 2 e $a_{ij} = j - i^2$, o determinante da matriz A é:
a) 0
b)1
c) 2
d) 3
e) 4

5. (FGV) Seja a raiz da equação $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 2 & 0 & x & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16$. então, o valor de x^2 é:

a) 16
b) 4
c) 0
d) 1
e) 64

6. (CESCEM) Sendo x e y os determinantes das matrizes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2a & 2c \\ -3b & 3d \end{pmatrix}$, respectivamente, então $\frac{y}{x}$ vale:
a) 36
b) 12
c) −6
d) −12
e) −36

7. (FATEC) Sejam as matrizes A e B adiante.
$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
A equação $\det(A - xB) = 0$, com $x \in \Re$, admite:
a) uma raiz de multiplicidade 2.
b) uma raiz negativa.
c) duas raízes negativas.
d) uma raiz negativa e outra positiva.
e) uma raiz nula.

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Sendo todas as matrizes, colocadas como exemplo, quadradas, relacionamos abaixo as principais propriedades dos determinantes:

1) <u>Fila nula</u>: se numa matriz todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) são nulos, então o seu determinante é igual a zero.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0$

2) <u>Filas iguais ou proporcionais</u>: se numa matriz os elementos de uma linha (ou coluna) são iguais ou proporcionais aos de uma linha (ou coluna) paralela, então o seu determinante é nulo.

Exemplos: $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$ (1ª e 3ª linhas são iguais)

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 10 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0$ (1ª e 3ª colunas são proporcionais)

3) <u>Matriz triangular</u>: se uma matriz é triangular, então o seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

OBSERVAÇÃO: uma matriz é dita triangular quando todos os elementos abaixo ou acima da diagonal principal são nulos.

Exemplo: $\begin{vmatrix} a & e & h & j \\ 0 & b & f & i \\ 0 & 0 & c & g \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot c \cdot d$

4) Multiplicação de uma fila por um número real: se a matriz B é obtida multiplicando uma fila qualquer de uma matriz A, por um número real k, então:

$$\boxed{\det B = k \cdot \det A}$$

Exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

5) Troca de filas: se trocarmos de posição duas filas paralelas e consecutivas de uma matriz A, obtendo a matriz B, então:

$$\boxed{\det A = -\det B}$$

Exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

6) Matriz transposta: o determinante de uma matriz A é igual ao determinante de sua matriz transposta.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 15 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 15 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 8 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

7) Teorema de Binet: se as matrizes A e B têm mesma ordem, então o determinante do produto de A e B é igual ao produto dos determinantes de A e de B.

$$\boxed{\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B}$$

8) Se as matrizes A e B diferem por uma única fila e a matriz C é obtida de A e B, conservando os elementos correspondentes iguais e somando os diferentes, então:

$$\boxed{\det A + \det B = \det C}$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 8 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 8 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2+4 \\ 8 & 7 & 1+3 \\ 2 & 2 & 5+6 \end{vmatrix}$$

EXERCÍCIOS

1. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$ calcule $\begin{vmatrix} 2a & 3b & -c \\ 2d & 3e & -f \\ 2g & 3h & -i \end{vmatrix}$.

2. O valor do determinante $\begin{vmatrix} a & 1 & (2a+3) \\ b & 1 & (2b+3) \\ c & 1 & (2c+3) \end{vmatrix}$ é:

a) $3abc$
b) 0
c) $\frac{2}{3}abc$
d) $3(a+b+c)$
e) $2(a+b+c)$

3. Sendo A uma matriz de ordem 3 e $\det A = 4$, calcule:
a) $\det(A^2)$

b) $\det(2A)$

4. (UFPA) O valor de um determinante é 12. Se dividirmos a 1ª linha por 6 e multiplicarmos a 3ª linha por 4, o novo determinante valerá:
a) 8
b) 18
c) 24
d) 36
e) 48

8. SISTEMAS LINEARES

EQUAÇÃO LINEAR

DEFINIÇÃO: chama-se equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ toda equação do tipo

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b},$$

onde, $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ (coeficientes) e b (termo independente) são números reais.

Se $b = 0$, chamamos a equação de homogênea.

Exemplo

Identifique os coeficientes e o termo independente da equação abaixo e diga se ela é homogênea:

$$4x + 2y - 5z - 4w = 3$$

$4, 2, -5$ e -4 são os coeficientes e 3 é o termo independente.

A equação não é homogênea pois o termo independente 3 é diferente de zero.

SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO LINEAR

Chamamos de solução de uma equação linear a ênupla ou sequência ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$, se, e somente se, for verdadeira a expressão

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + ... + \alpha_nx_n = b.$$

Exemplo:

A sequência $S = (-2, -1, 3, -7)$ é uma solução da equação:

$$4x + 2y - 5z - 4w = 3,$$

pois,

$$\begin{aligned} 4(-2) + 2(-1) - 5 \cdot 3 - 4(-7) &= 3 \\ -8 - 2 - 15 + 28 &= 3 \\ 3 &= 3 \text{ (verdade)} \end{aligned}$$

SISTEMA LINEAR

Um sistema linear é todo conjunto de m equações lineares $(m \geq 2)$, nas n incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Ele se denota da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Exemplo $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ x - 2y + z = 1 \\ 3x + z = 7 \end{cases}$ $\quad S = \left(\dfrac{13}{10}, \dfrac{17}{10}, \dfrac{31}{10}\right)$

Se $b_1 = b_2 = b_3 = ... = b_n = 0$, então chamamos o sistema linear de homogêneo. Neste caso, o sistema sempre tem solução.

Exemplo $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ $\quad S = (0, 0, 0)$

SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Se a sequência ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ é solução de todas as equações de um sistema linear, ela também é solução deste sistema.

Exemplo

No sistema, $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$ a sequência (5, 2) é solução, pois também é solução de todas as equações, como podemos ver abaixo:

$$\begin{cases} 5 + 2 = 7 \text{ (verdade)} \\ 5 - 2 = 3 \text{ (verdade)} \end{cases}$$

RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR POR SUBSTITUIÇÃO

Para encontrarmos a solução de um sistema linear podemos fazer substituições de uma equação em outras.

Exemplo

Ache a solução do sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$

A partir da primeira equação temos:

$$x + 3y = 6 \Rightarrow x = 6 - 3y,$$

substituímos, então, na segunda:

$$\begin{aligned} 2x - y &= -2 \\ 2(6 - 3y) - y &= -2 \\ 12 - 7y &= -2 \\ -7y &= -14 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

voltamos na primeira equação para achar o valor de x:

$$x = 6 - 3y \Rightarrow x = 6 - 3 \cdot 2 \Rightarrow x = 0.$$

Logo, a solução é $S = (0, 2)$.

EXERCÍCIOS

1. (MACK-2004) Uma pessoa quer distribuir, entre seus amigos, um determinado número de convites. Se der 2 convites a cada amigo, sobrarão 25 convites; entretanto, se pretender dar 3 convites a cada amigo, faltarão 15 convites. Caso essa pessoa pretenda dar 4 convites a cada amigo, ela precisará ter mais:

a) 45 convites
b) 55 convites
c) 40 convites
d) 80 convites
e) 70 convites

2. (FUVEST-2003) O sistema $\begin{cases} x+(c+1)\,y=0 \\ cx+y=-1 \end{cases}$, onde $c\neq 0$, admite uma solução (x,y) com $x=1$. Então, o valor de c é:
a) -3
b) -2
c) -1
d) 1
e) 2

3. (VUNESP-2003) A agência Vivatur vendeu a um turista uma passagem que foi paga, à vista, com cédulas de 10, 50 e 100 dólares, num total de 45 cédulas. O valor da passagem foi 1950 dólares e a quantidade de cédulas recebidas de 10 dólares foi o dobro das 100. O valor, em dólares, recebido em notas de 100 pela agência na venda dessa passagem, foi:
a) 1800
b) 1500
c) 1400
d) 1000
e) 800

4. (FUVEST-2003) Um caminhão transporta maçãs, peras e laranjas, num total de 10000 frutas. Elas estão condicionadas em caixas (cada caixa só contém um tipo de fruta), sendo que cada caixa de maçãs, peras e laranjas, têm, respectivamente 50 maçãs, 60 peras e 100 laranjas e custam, respectivamente, 20, 40 e 10 reais. Se a carga do caminhão tem 140 caixas e custa 3300 reais, calcule quantas maçãs, peras e laranjas estão sendo transportadas.

CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Classificamos os sistemas lineares de acordo com as soluções do mesmo. Chamamos de:

Sistema Possível e Determinado (SPD), se o sistema admitir uma única solução.

Sistema Possível e Indeterminado (SPI), se o sistema admitir infinitas soluções.

Sistema Impossível (SI), se o sistema não admitir nenhuma solução.

Exemplo

1) Classifique os sistemas:

a) $\begin{cases} x+2y=2 \\ x-y=-4 \end{cases}$

Subtraindo as duas equações, temos:

$$\begin{array}{r} x+2y=2 \\ \underline{x-y=-4} \\ 3y=6\Rightarrow y=2 \end{array}$$

substituindo em qualquer equação temos: $x-y=-4\Rightarrow x-2=-4\Rightarrow x=-2$

então, $(-2,2)$ é solução do sistema linear, portanto é um sistema possível e determinado.

b) $\begin{cases} 2x-y+z=4 \\ x-y=0 \end{cases}$

Da segunda equação temos, $x-y=0\Rightarrow y=x$. Substituindo na primeira equação:

$$2x-y+z=4$$
$$2x-x+z=4$$
$$z=4-x$$

Escolhemos uma incógnita (x neste caso) e escrevemos todas as outras em função desta que escolhemos. Temos então que

$$(x,y,z)=(x,x,4-x)$$

é solução do sistema linear, ou seja, temos infinitas soluções e podemos escolher qualquer x real. Veja alguns exemplos:

para $x=0\Rightarrow(0,0,4-0)\Rightarrow(0,0,4)$
para $x=5\Rightarrow(5,5,4-5)\Rightarrow(5,5,-1)$
para $x=\sqrt{2}\Rightarrow\left(\sqrt{2},\sqrt{2},4-\sqrt{2}\right)$

Temos então, um sistema possível e indeterminado.

c) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$

Subtraindo as duas equações, temos:

$$\begin{array}{r} x+y=1 \\ \underline{x+y=2} \\ 0=-1 \end{array}$$

Absurdo! Este sistema claramente não tem soluções, pois em uma mesma soma nunca teremos dois resultados distintos.

Logo, é um sistema indeterminado.

EXERCÍCIOS

5. Resolver e classificar os sistemas:

a) $\begin{cases} x+3y=11 \\ -2x+y=-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y+z=6 \\ y-z=-1 \\ 3z=6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 2x+2y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ 2x-y-3z+2w=-6 \\ -x+4y-z-10w=1 \\ 2y-2w=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x+2y-z=5 \\ -2x+2z=2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x-y+2z=2 \\ y+z=1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ -2x-2y-4z=1 \\ x-y=2 \end{cases}$

MATRIZ DE UM SISTEMA LINEAR

Tendo o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Definimos a matriz M dos coeficientes do sistema ou <u>matriz incompleta do sistema</u> como:

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

Se tivermos um sistema com n equações e n incógnitas, ou seja, o número de equações igual ao de incógnitas teremos então uma <u>matriz quadrada</u>.

REGRA DE CRAMER

Se tivermos o sistema linear:

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$$

definimos os seguintes determinantes:

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \mathrm{D}_x=\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}} & \begin{matrix} b \\ d \end{matrix} \end{vmatrix} \text{ e } \mathrm{D}_y=\begin{vmatrix} \begin{matrix} a \\ c \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}} \end{vmatrix}$$

Repare que D é o determinante da matriz M definida acima, e D_x foi obtido trocando a primeira coluna de D (a coluna dos x) pelos termos independentes de cada equação. O mesmo foi feito com a segunda coluna (a coluna dos y).

Se o sistema for possível e determinado, sua solução será dada por:

$$x=\frac{\mathrm{D}_x}{\mathrm{D}} \quad \text{e} \quad y=\frac{\mathrm{D}_y}{\mathrm{D}}$$

Podemos estender esta definição para um sistema com mais de duas equações e incógnitas, então se o sistema tiver 5 equações e 5 incógnitas, teremos o determinante D de uma matriz incompleta de ordem 5. Teremos também mais 5 determinantes, um para cada incógnita.

É claro que se o sistema tiver muitas equações, torna-se demasiadamente longo o processo de obtenção de sua solução pela regra de Cramer.

Exemplo

Resolver o sistema: $\begin{cases} x+y+2z=9 \\ x+2y+z=8 \\ 2x+y+z=7 \end{cases}$

Achamos primeiramente os valores de $\mathrm{D}, \mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y$ e D_z.

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-4 \qquad \mathrm{D}_x=\begin{vmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-4$$

$$\mathrm{D}_y=\begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}=-8 \qquad \mathrm{D}_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}=-12$$

$$x=\frac{\mathrm{D}_x}{\mathrm{D}}=\frac{-4}{-4}=1 \quad y=\frac{\mathrm{D}_y}{\mathrm{D}}=\frac{-8}{-4}=2 \quad z=\frac{\mathrm{D}_z}{\mathrm{D}}=\frac{-12}{-4}=3$$

A solução do sistema é, então, $s=(1,2,3)$.

EXERCÍCIOS

6. Resolver pela Regra de Cramer.

a) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x+4y=13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax+y=b \\ bx+4y=a \end{cases}$ $(4a \neq b)$

c) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+3y+4z=20 \\ -x+y+2z=7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x+y+2z=-2 \\ x-y-z=5 \\ y-z=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -2x-y+z=0 \\ x-2y-z=1 \\ 2x+2y-2z=-4 \end{cases}$

DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Discutir um sistema linear em função de um ou mais parâmetros, é dizer para quais valores o sistema é determinado, indeterminado ou impossível.

Exemplo

Discuta o sistema abaixo em função de *m*.

$$\begin{cases} mx+y=1 \\ x+my=1 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}=m^2-1$$

Pela Regra de Cramer temos que se $D \neq 0$, então o sistema é possível e determinado.

$$D \neq 0 \Leftrightarrow m^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1 \text{ e } m \neq -1$$

Concluímos que o sistema é possível e determinado para qualquer valor diferente de 1 e -1.

Resta-nos agora analisar o que acontece com o sistema para $m=1$ e $m=-1$

Para $m=1$, o sistema será $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$, que é um sistema possível e indeterminado.

Para $m=-1$, o sistema será $\begin{cases} -x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$, que é um sistema impossível.

Podemos resumir o sistema da seguinte forma:

- se $m \neq -1$ e $m \neq 1$: SPD – Sistema Possível e Determinado.
- se $m=1$: SPI – Sistema Possível e Indeterminado.
- se $m=-1$: SI – Sistema Impossível.

EXERCÍCIO

7. (MACK-2004) O sistema $\begin{cases} x-ay=1 \\ ax-4y=a \end{cases}$

a) tem solução única, para um único valor de a.
b) tem solução única, para exatamente dois valores de a.
c) sempre admite solução, qualquer que seja o valor de a.
d) não tem solução, para um único valor de a.
e) não tem solução, para exatamente dois valores de a.

9. PROGRESSÕES

SEQUÊNCIAS

Denominamos sequência (ou sucessão) um conjunto ordenado de números que representamos por:

$$(a_1; a_2; a_3; a_4; ...; a_n; ...)$$

em que a_1 é o primeiro elemento ou primeiro termo;
em que a_2 é o segundo elemento ou segundo termo;
em que a_3 é o terceiro elemento ou terceiro termo, etc.

Dizemos que a_n é o enésimo termo ou termo geral da sequência. Observamos que: $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

Uma sequência pode ser finita (se apresenta um último termo) ou infinita (indicada por reticências no final).

Exemplos:

a) $(0; 2; 4; 6; 8; 10; ...)$ é a sequência (infinita) dos números naturais pares. Nesta sequência temos: $a_1 = 0$; $a_2 = 2$; $a_3 = 4$; $a_4 = 6$; $a_5 = 8$; $a_6 = 10$, etc.

b) $(3; 2; 3; 1; 0; 6; 9; 2)$ é a sequência (finita) dos dígitos que compõem o número do telefone do Cursinho Popular dos Estudantes da USP. Essa sequência possui oito termos, sendo: $a_1 = 3$; $a_2 = 2$; $a_3 = 3$; $a_4 = 1$; $a_5 = 0$; $a_6 = 6$; $a_7 = 9$; $a_8 = 2$.

OBSERVAÇÃO: pelos exemplos acima, podemos verificar que a sequência é simplesmente uma ordem de números, mas não existe necessariamente, uma relação entre um termo e outro.

Igualdade

Quando indicamos uma sequência, utilizamos parênteses em vez de chaves; isso é feito para lembrar que estamos lidando com um conjunto ordenado**.**

Duas sequências são iguais se, e somente se, tiverem os mesmos elementos dispostos na mesma ordem.

Exemplos:

a) As sequências $(a; b; c; d; e)$ e $(1958; 1962; 1970; 1994; 2002)$ são iguais se, e somente se, $a = 1958$, $b = 1962$, $c = 1970$, $d = 1994$ e $e = 2002$.

b) As sequências $(3; 2; 3; 1; 0; 6; 9; 2)$ e $(3; 2; 3; 1; 0; 6; 2; 9)$ apresentam os mesmos elementos, mas não na mesma ordem. Então, são sequências diferentes, elas podem representar por exemplo, os números dos telefones de dois locais diferentes.

FÓRMULA DO TERMO GERAL

Uma sequência pode ser definida através de uma fórmula que dá o valor de cada termo a_n em função da sua posição n na sucessão. Dizemos, nesse caso, que a sequência está definida pela fórmula do termo geral.

Exemplo:

Escrever os quatro primeiros termos da sequência cuja fórmula do termo geral é $a_n = 3n + 9; n \geq 1$.

Vamos atribuir valores a n e calcular os termos correspondentes:

$$n = 1 \rightarrow a_1 = 3 \cdot 1 + 9 = 3 + 9 = 12$$
$$n = 2 \rightarrow a_2 = 3 \cdot 2 + 9 = 6 + 9 = 15$$
$$n = 3 \rightarrow a_3 = 3 \cdot 3 + 9 = 9 + 9 = 18$$
$$n = 4 \rightarrow a_4 = 3 \cdot 4 + 9 = 12 + 9 = 21$$

Os quatro primeiros termos da sequência são 12, 15, 18 e 21.

LEI DE RECORRÊNCIA

Outro modo de definir uma sequência é dar o valor de um dos termos (geralmente o primeiro) e uma fórmula que permite calcular cada termo conhecendo o seu antecedente na sucessão. Dizemos, nesse caso, que a sequência está definida por uma lei de recorrência.

Exemplo:

A sequência em que $a_1 = 10$ e $a_{p+1} = 2a_p - 1$, para todo $p \geq 1$ é:

$$(10, 19, 37, 73, 145, ...)$$

De fato, note que:

$$a_2 = 2a_1 - 1 = 2 \cdot 10 - 1 = 19$$
$$a_3 = 2a_2 - 1 = 2 \cdot 19 - 1 = 37$$
$$a_4 = 2a_3 - 1 = 2 \cdot 37 - 1 = 73$$

e assim por diante.

EXERCÍCIOS

1. Escrever os 6 primeiros termos das sequências dadas pelas seguintes leis de recorrência, sendo n $\in$ N * :

a) $a_n = 4n + 1$

b) $b_n = 2n(1 - n)$

c) $c_n = n^3 - 5$

d) $d_n = (n + 1)(n - 1)$

e) $e_n = \dfrac{n^2 - 81}{n - 9}$

f) $f_n = (-1)^n$

g) $g_n = 2^{n-3}$

2. (PUCRS) Na sequência $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{8},\frac{3}{4},\frac{7}{8},x,y,z,...\right)$, os valores x, y, z são respectivamente:

a) $1,\frac{9}{8},\frac{5}{4}$

b) $\frac{1}{4},\frac{3}{8},\frac{5}{4}$

c) $\frac{5}{4},\frac{9}{8},\frac{7}{4}$

d) $\frac{9}{4},\frac{13}{8},\frac{11}{4}$

e) $\frac{11}{4},\frac{9}{8},\frac{13}{4}$

3. A definição por recorrência

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{p+1} = a_p + 5 \end{cases} \text{ e}$$

sendo $a \in \Re$ e $r \in \Re^*$, com $p \in \mathbf{N}^*$ pode definir uma sequência do tipo:

$a)(5, 4, 7, 9, 3, 16,...)$

$b)(2, 4, 8, 16, 32,...)$

$c)(4, 9, 14, 19, 24,....)$

$d)(4, 7, 13, 25,...)$

$e)\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},...\right)$

4. (VUNESP) Os coelhos se reproduzem mais rapidamente que a maioria dos mamíferos. Considere uma colônia de coelhos que se inicia com um único casal de coelhos adultos e denote por a_n o número de casais adultos desta colônia ao final de n meses. Se $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e, para $n \geq 2, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, o número de casais de coelhos adultos na colônia ao final do quinto mês será:

a) 13
b) 8
c) 6
d) 5
e) 4

5. (VUNESP-97) Considere as sequências (a_n) e (b_n) definidas por $a_{n+1} = 2^n$ e $b_{n+1} = 3^n, n \geq 0$. Então, o valor de $a_{11} \cdot b_6$ é:

a) $2^{11} \cdot 3^6$
b) 12^5
c) 5^{15}
d) 6^{15}
e) 6^{30}

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Na sequência $(7;17;27;37;47;57)$ podemos notar que os valores são obtidos somando-se 10 ao termo anterior, ou seja:

$$7+10=17 \quad 17+10=27 \quad 27+10=37$$
$$37+10=47 \quad 47+10=57$$

Dizemos, por isso, que essa sequência é uma progressão aritmética.

Definição: chamamos progressão aritmética (P.A.) a toda sequência onde, o segundo termo em diante são obtidos somando-se uma mesma constante r ao termo anterior. Essa constante r é denominada razão da P.A.

A P.A. $(7;17;27;37;47;57)$ tem razão $r = 10$.

Temos por definição, que uma P.A. é uma sequência dada por uma lei de recorrência da forma:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{p+1} = a_p + r, p \geq 1 \end{cases}$$

ou seja, é uma sequência da forma:

$$(a; a+r, a+2r; a+3r; a+4r; ...)$$

Exemplo

Observe abaixo:

$a)$ $(8;17;26;35;44;...)$ é uma P.A. com $a_1 = 8$ e $r = 9$.

$b)$ $(10;5;0;-5;-10;-15;...)$ é uma P.A. com $a_1 = 10$ e $r = -5$.

$c)$ $(7;7;7;7;7;7)$ é uma P.A. com $a_1 = 7$ e $r = 0$.

$d)$ $(-1;-0,5;0;0,5;1;1,5;...)$ é uma P.A. com $a_1 = -1$ e $r = 0,5$.

$e)$ $\left(\sqrt{2}+1;\sqrt{2};\sqrt{2}-1\right)$ é uma P.A. de 3 termos com $a_1 = \sqrt{2}+1$ e $r = -1$.

CLASSIFICAÇÃO

Uma sequência de números reais cujos termos vão aumentando, isto é, cada termo é maior que o anterior, é denominada sequência <u>crescente</u>. Se os termos vão diminuindo, isto é, cada termo é menor que o anterior, a sequência é denominada <u>decrescente</u>. Quando todos os termos são iguais, a sequência é denominada <u>constante ou estacionária</u>.

No caso das progressões aritméticas, podemos verificar que uma P.A. de razão r é:

Crescente, se $r > 0$;

Decrescente, se $r < 0$;

Constante, se $r = 0$.

FÓRMULA DO TERMO GERAL

Escrevendo o valor de cada termo de uma P.A. em função do primeiro termo a_1 e da razão r

$$\left(a_1; \underbrace{a_1+1r}_{a_2}; \underbrace{a_1+2r}_{a_3}; \underbrace{a_1+3r}_{a_4}; ... \underbrace{a_1+(n-1)r}_{a_n}; ...\right)$$

Notamos que,

o 2º termo é $a_2 = a_1 + 1r$;
o 3º termo é $a_3 = a_1 + 2r$;
o 4º termo é $a_4 = a_1 + 3r$;
o 5º termo é $a_5 = a_1 + 4r$, etc.

Pode-se concluir que o termo geral a_n é dado por

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$$

Exemplos

1) Na P.A. de primeiro termo $a_1 = 3$ e razão $r = 6$, o termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r = 3 + (n-1)\cdot 6 = 6n - 3$$

Nessa P.A., o 27º termo é:

$$a_{27} = a_1 + (27-1)\cdot r = 3 + 26\cdot 6 = 159$$

2) Quantos termos existem na P.A. $(52;49;46;43;...;-71)$?

Observemos que $a_1 = 52$ e $r = 49 - 52 = -3$. Fazendo o último termo igual a a_n, isto é $a_n = -71$, devemos calcular n. Temos:

$$\begin{gathered} a_n = a_1 + (n-1)r \\ -71 = 52 + (n-1)\cdot(-3) \\ -71 = 52 - 3\cdot n + 3 \\ 3\cdot n = 126 \\ n = 42 \end{gathered}$$

PROPRIEDADE DOS TERMOS DE UMA P.A.

Média Aritmética

Consideremos a P.A. $(5;9;13;17;21;25;29;...)$ e observemos que:

$$9 = \frac{5+13}{2}, \text{ logo } a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

(a_2 é a média aritmética de a_1 e a_3.)

$$13 = \frac{9+17}{2}, \text{ logo } a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$$

(a_3 é a média aritmética de a_2 e a_4)

$$17 = \frac{13+21}{2}, \text{ logo } a_4 = \frac{a_3 + a_5}{2}$$

(a_4 é a média aritmética de a_3 e a_5), etc.

Numa P.A. qualquer, de razão r, quando tomamos três termos consecutivos a_{p-1}, a_p e a_{p+1}, temos:

$$\begin{cases} a_p = a_{p-1} + r \\ a_p = a_{p+1} - r \end{cases} \quad (a_1; a_2; a_{p-1}; a_p; a_{p+1}; ...)$$

Somando membro a membro e calculando a_p, vem:

$$a_p = \frac{a_{p-1} + a_{p+1}}{2}$$

Podemos então enunciar a seguinte propriedade, que é válida para toda P.A.:

Numa P.A., cada termo a partir do segundo, é igual à média aritmética entre o termo anterior e o posterior na sequência. Ou seja, se temos três termos consecutivos numa P.A., o termo do meio é a média aritmética dos outros dois.

Soma dos Índices

Na P.A. $(5;9;13;17;21;25;29;33;37;...)$ observemos agora que:

$$\text{I)} \begin{cases} a_1 + a_5 = 5 + 21 = 26 \\ a_2 + a_4 = 9 + 17 = 26 \end{cases}$$

$$a_1 + a_5 = a_2 + a_4 \qquad (1+5=2+4)$$

$$\text{II)} \begin{cases} a_3 + a_8 = 13 + 33 = 46 \\ a_5 + a_6 = 21 + 25 = 46 \end{cases}$$

$$a_3 + a_8 = a_5 + a_6 \qquad (3+8=5+6)$$

Consideremos quatro termos quaisquer, a_m, a_n, a_p e a_q, de uma P.A. de razão r, tais que a soma de índices $m+n$ é igual à soma $p+q$. Temos:

$$\begin{cases} a_m = a_1 + (m-1)\cdot r \\ a_n = a_1 + (n-1)\cdot r \end{cases}$$

$$a_m + a_n = 2\cdot a_1 + (m+n-2)\cdot r$$

$$\begin{cases} a_p = a_1 + (p-1)\cdot r \\ a_q = a_1 + (q-1)\cdot r \end{cases}$$

$$a_p + a_q = 2\cdot a_1 + (p+q-2)\cdot r$$

Como $m+n = p+q$, vem que $a_m + a_n = a_p + a_q$. Podemos então enunciar a seguinte propriedade para qualquer P.A.:

Para quatro termos quaisquer, a_m, a_n, a_p e a_q, de uma P.A., se a soma dos índices $m+n$ é igual à soma $p+q$, então a soma dos termos $a_m + a_n$ é igual à soma $a_p + a_q$.

Nota: a propriedade 1 pode ser deduzida a partir desta. Observamos, por exemplo, que para os termos a_5, a_6, a_7 de uma P.A. vale que $a_6 + a_6 = a_5 + a_7$ porque $(6+6=5+7)$ e daí vem que $a_6 = \frac{a_5 + a_7}{2}$.

EXERCÍCIOS

6. Verifique se cada uma das seguintes sucessões é uma P.A , em caso afirmativo, determine a razão.
a) (5, 5, 5,...)
b) (6, 2, -2, -6, -10)
c) (1; 0,7; 0,4; 0,1)
d) (x, 2x, 3x, 4x,...)
e) (-1, 0, 1, 2, 4, 5)

7. Classifique as sentenças abaixo em verdadeiras ou falsas.
a) (   )A sequência (5, 9, 13, 17, 21) é uma P.A

b) (   )A razão da P.A $\left(\sqrt{2},2\sqrt{2},4\sqrt{2},6\sqrt{2}\right)$ é 2 .

c) (   )Na P.A (1, 7, 13, 19, ...) , $a_1 = 1$ e $r = 5$.

8. (UFPA) Sabendo que a sequência (1- 3x, x - 2, 2x + 1) é uma P.A, determinar o valor de x.
a) -2
b) 0
c) 2
d) 4
e) 6

9. (CESGRANRIO) As medidas, em graus, dos ângulos internos de um triângulo formam uma progressão aritmética (P. A.) de razão 30. A razão entre o menor e o maior lado do triângulo vale:
a) 1/30
b) 1/6
c) 1/4
d) 1/3
e) 1/2

10. (UFPR) Seja f uma função tal que $f(1)=2$ e $f(x+1)=f(x)-1$, para todo valor real de x. Então $f(100)$ é igual a :
a) -99
b) -97
c) 96
d) 98
e) 100

11. (UFRN) O número de múltiplos de 7 entre 50 e 150 é :
a) 9
b) 12
c) 14
d) 16
e) 23

12. (FATEC) Se as medidas dos ângulos internos de um triângulo estão em progressão aritmética e a medida do maior ângulo é o quíntuplo da medida do menor, então a diferença entre a medida do maior ângulo e a soma das medidas dos outros dois é:
a) $\pi/9$
b) $2\pi/9$
c) $4\pi/9$
d) $2\pi/3$
e) $\pi/2$

13. (UECE) Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k, ..., a_{50})$ uma progressão aritmética. Se $a_2 = 14, a_5 - a_3 = 18$ e $a_k = 239$, então k é igual a:
a) 26
b) 27
c) 28
d) 29

14. PUCRS) As medidas dos ângulos internos de um triângulo estão em progressão aritmética de razão 20^0. O menor ângulo desse triângulo mede:
a) 30^0
b) 40^0
c) 50^0
d) 60^0
e) 80^0

15. (UFPA) Três números estão em P.A., a soma destes números é 15 e o seu produto 105.
Qual a diferença entre o maior e o menor?
a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

16. (UFBA) Numa progressão aritmética, o primeiro termo é 1 e a soma do n-ésimo termo com o número de termos é 2. A razão dessa progressão é:
a) 2n-1
b) 2n -2
c) n- 1
d) 1
e) -1

17. (PUCSP) Um livreiro coloca 29 livros em uma estante, da esquerda para a direita, em ordem crescente de preços. Se o preço de cada livro difere do adjacente em R$ 2,00 e o preço do livro mais barato é igual 12,5% do preço do mais caro, quando custa o livro mais caro?

18. (FUVEST) Em uma progressão aritmética de termos positivos, os três primeiros termos são:
$1-a, -a, \sqrt{11-a}.$

o quarto termo dessa P.A. é

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

19. (UNESP-2000) Duas pequenas fábricas de calçados A e B, têm fabricado respectivamente 3000 e 1100 pares de sapatos por mês. Se a partir de janeiro a fábrica A aumentar sucessivamente a produção em 70 pares por mês e a fábrica B aumentar sucessivamente a produção em 290 pares por mês, a produção da fábrica B superará a produção de A, a partir de:
a) março
b) maio
c) julho
d) setembro
e) novembro

20. Determine o valor de x para que os números $\log_2 8, \log_2(x+9)$ e $\log_2(x+7)$ estejam, nessa ordem, em P.A..

21. Interpole 11 meios aritméticos entre 1 e 37.

22. O perímetro de um triângulo retângulo mede 24cm. Calcule as medidas dos lados, sabendo que eles estão em P.A..

A SOMA DOS N PRIMEIROS TERMOS DE UMA P.A.

Dada uma sequência qualquer $(a_1; a_2; a_3; a_4; ...; a_n; ...)$, indicamos por S_n a soma dos seus n primeiros termos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Assim, por exemplo, a soma dos termos da P.A. (21; 33; 45; 57; 69) é

$$S_5 = 21 + 33 + 45 + 57 + 69$$

É claro que podemos calcular essa soma diretamente, termo a termo, mas isso poderá ser muito trabalhoso. Vejamos um método indireto de obtê-la:

$$\begin{array}{r} S_5 = 21 + 33 + 45 + 57 + 69 \\ +S_5 = 69 + 57 + 45 + 33 + 21 \\ \hline 2S_5 = 90 + 90 + 90 + 90 + 90 \end{array}$$

$$2S_5 = 90 \times 5 \Rightarrow S_5 = \frac{90 \times 5}{2} = 225$$

Esse método funciona para toda P.A., veja, por exemplo, a soma dos 6 primeiros termos de (13; 8; 3; -2; -7; -12; -17; …).

$$\begin{array}{r} S_6 = 13 + 8 + 3 + (-2) + (-7) + (-12) \\ +S_6 = (-12) + (-7) + (-2) + 3 + 8 + 13 \\ \hline 2S_6 = (1) + (1) + (1) + (1) + (1) + (1) \end{array}$$

$$2S_6 = (1) \times 6 \Rightarrow S_6 = \frac{1 \times 6}{2} = 3$$

De modo geral, para uma P.A. $(a_1; a_2; a_3; a_4; ...; a_{n-1}; a_n)$, temos:

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + a_2 + \ldots a_{n-1} + a_n \\ +S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 \\ \hline 2 \times S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \end{array}$$

Nos parênteses comparecem as somas de dois termos cujos índices somam sempre 1+n. Logo, essas n somas são todas iguais a $(a_1 + a_n)$ e concluímos que:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Exemplos

1) Calcular a soma dos 40 termos iniciais da P.A. $(2; 5; 8; \ldots)$.

Temos $a_1 = 2$ e $r = 3$. Comecemos determinando 40º termo:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \longrightarrow a_{40} = 2 + (40-1) \cdot 3 = 119$$

Então:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_{40} = \frac{(a_1 + a_{40}) \cdot 40}{2} = \frac{(2 + 119) \cdot 40}{2} = 2420$$

2) Calcular a soma dos n primeiros números ímpares positivos.

A sequência dos ímpares positivos $(1; 3; 5; 7; \ldots)$ é uma P.A. com $a_1 = 1$ e $r = 2$. Temos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r = 1 + (n-1)2 \Rightarrow a_n = 2n - 1$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{[1 + (2n-1)] \cdot n}{2}$$

$$S = n^2$$

Concluímos que a soma dos n primeiros ímpares positivos é igual a n^2. Por exemplo, se $n = 4$, temos:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7}_{4\ termos} = \underbrace{16}_{4^2}$$

3) Calcular o número de termos da P.A. finita de razão $r = -8$, em que o primeiro termo é 100 e a soma dos termos é 640.

Temos $r = -8$, $a_1 = 100$, $S_n = 640$ e queremos determinar n.

$$a_n = a_1 + (n-1)r = 100 + (n-1) \cdot (-8)$$

$$a_n = 108 - 8n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow 640 = \frac{[100 + 108 - 8n] \cdot n}{2}$$

$$1280 = 208n - 8n^2$$

$$8n^2 - 208n + 1280 = 0$$

$$n^2 - 26n + 160 = 0$$

$$n = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 1 \cdot 160}}{2 \cdot 1} = \frac{26 \pm 6}{2}$$

$$(n = 16 \text{ ou } n = 10)$$

EXERCÍCIOS

23. (Mackenzie) Um relógio bate as horas dando uma pancada à 1 hora, 2 pancadas às 2 horas; e assim por diante até às 12 horas. Às 13 horas volta novamente a dar 1 pancada , 2 às 14 horas; e assim por diante até às 24 horas. Bate ainda uma única pancada a cada meia hora. Começando a funcionar às zero horas, após 30 dias completos, sem interrupção, o número de pancadas dado será:
a) 5400
b) 5340
c) 5460
d) 5520
e) 4800

24. (UFV) Numa caixa há 1000 bolinhas de gude. Retiram-se 15 bolinhas na primeira vez, 20 bolinhas na segunda vez, 25 na terceira e assim sucessivamente na mesma razão. Após a décima quinta retirada, sobrarão na caixa:
a) 250 bolinhas
b) 200 bolinhas
c) 300 bolinhas
d) 500 bolinhas
e) 750 bolinhas

25. (FGV-SP) A soma dos 50 primeiros termos da P.A. na qual $a_6 + a_{45} = 160$ é:
a) 3480
b) 4000
c) 4200
d) 4320
e) 4500

26. (CESGRANRIO) a soma dos n primeiros termos de uma sucessão é dada por $S_n = n(n+1)$. Então o 20º termo da sucessão é:
a) 420
b) 380
c) 60
d) 40
e) 20

27. (PUC-SP) A soma de todos os números naturais compreendidos entre 100 e 200, tal que o resto da divisão de cada um deles por 5 seja 2, é:
a) 2990
b) 2691
c) 2713
d) 2027
e) n.r.a.

28. (VUNESP) Uma progressão aritmética de 51 termos tem o vigésimo sexto termo igual a -38; então a soma dos termos dessa progressão é:
a) -900
b) -1938
c) 969
d) 0
e) -969

29. (PUC-RS) Um teatro tem 18 poltronas na primeira fila, 24 na segunda, 30 na terceira e assim por diante na mesma sequência, até a vigésima fila que é a última. O número de poltronas desse teatro é:
a) 92
b) 132
c) 150
d) 1320
e) 1500

30. (FUVEST) A soma das frações irredutíveis, positivas, menores do que 10, de denominador 4, é:
a) 10
b) 20
c) 60
d) 80
e) 100

31. (PUC-SP) Um pêndulo, oscilando, percorre sucessivamente 18cm, 15cm, 12cm, ... A soma dos percursos até o repouso é:
a) 45 cm
b) 63 cm
c) 90 cm
d) 126 cm
e) n.r.a.

32. (FGV) Um automóvel percorre n primeiro dia de uma certa distância x; no segundo dia percorre o dobro do que percorreu no n primeiro dia; no terceiro dia percorre o triplo do 1º dia, e assim sucessivamente. Ao final de 20 dias percorreu uma distância de 6300 km. A distância percorrida no primeiro dia foi de:
a) 15 km
b) 30 km
c) 20 km
d) 25 km
e) 35 km

33. (UNB) Se $1+2+3+4+\ldots+n=105$, então o valor de n é :
a) 12
b) 14
c) 11
d) 13
e) 15

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

Para introduzir este tema, imaginem a seguinte situação:

Numa sala de aula com 10 alunos onde cada um tem uma quantidade de dinheiro que segue a seguinte lógica: o primeiro aluno tem uma quantidade x de dinheiro, enquanto o segundo tem o dobro do primeiro, ou seja, $2x$, o terceiro tem o dobro do segundo, ou seja, $4x$ e assim sucessivamente.Sequência:

$$(x, 2x, 4x, 8x, 16x, 32x, 64x, 128x, ...)$$

Você consegue ver alguma lógica nesta sequência?

Observe que o termo imediatamente posterior é o dobro do anterior, e todos baseados no primeiro. Imagine também que o x é um valor constante, digamos 10 reais, veja a sequência:

$$(10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, ...)$$

E também podemos raciocinar da seguinte maneira:

$$(a_1, a_1 \cdot 2, a_1 \cdot 4, a_1 \cdot 8, a_1 \cdot 16, a_1 \cdot 32, a_1 \cdot 64, ...)$$

Vejamos, por exemplo, o terceiro termo, que acima está colocado como $a_1 \cdot 4$; "Você não concorda que o a_3 pode ser escrito como $a_1 \cdot 2^2$?"

Todos os termos podem então ser escritos em função do primeiro termo a_1 .

O número 2 (na sequência dada), será chamado de razão q, então a sequência ficará desta maneira:

$$(a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, a_1q^4, a_1q^5, a_1q^6, a_1q^7, ...)$$

Exemplos

a) $(1,3,9,27,81,...)$ é uma P.G. crescente, com $a_1 = 1$ e $q = 3$.

b) $\left(4,2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},...\right)$ é uma P.G. decrescente, com $a_1 = 4$ e $q = \frac{1}{2}$.

c) $(-5,-10,-20,-40,...)$ é uma P.G. decrescente, com $a_1 = -5$ e $q = 2$.

d) $\left(-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{8},...\right)$ é uma P.G. crescente com $a_1 = -1$ e $q = \frac{1}{2}$.

e) $(10,10,10,10,10,...)$ é uma P.G. estacionária com $a_1 = 10$ e $q = 1$.

f) $(3,-6,12,-24,...)$ é uma P.G. alternante com $a_1 = 3$ e $q = -2$.

Toda P.G., cujos termos alternam os sinais (razão negativa) é dita P.G. alternante.

FÓRMULA DO TERMO GERAL

Escrevendo cada termo de uma P.G. em função do primeiro termo a_1 e razão q :

$$(a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, a_1q^4, ..., a_1q^{n-1}, ...)$$

notamos que o

2º termo é $a_2 = a_1q^1$;

3º termo é $a_3 = a_1q^2$;

4º termo é $a_4 = a_1q^3$;

5º termo é $a_5 = a_1q^4$, etc.

Pode-se concluir que o termo geral a_n é dado por:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

<u>**Definição**</u>: chamamos progressão geométrica (PG) a toda sequência que a partir da multiplicação de uma mesma constante q por um termo, obtemos o termo seguinte. Esta constante q é denominada razão da P.G..

PROPRIEDADES DOS TERMOS DE UMA PG

1) Numa PG, cada termo, a partir do segundo, é a média geométrica entre o termo anterior e o posterior na sequência.

Consideremos a PG:

$$(5,10,20,40,80,160,320,...)$$

E observemos que:

$$10^2 = 5 \cdot 20 \text{, logo } (a_2)^2 = a_1 \cdot a_3$$

(a_2 é a média geométrica de a_1 e a_3).

$$20^2 = 10 \cdot 40 \text{, logo } (a_3)^2 = a_2 \cdot a_4$$

(a_3 é a média geométrica de a_2 e a_4).

$$40^2 = 20 \cdot 80 \text{, logo } (a_4)^2 = a_3 \cdot a_5$$

(a_4 é a média geométrica de a_3 e a_5, etc).

Numa P.G. qualquer, de razão *q*, quando tomamos três termos consecutivos a_{p-1}, a_p e a_{p+1}, temos:

$$\begin{cases} a_p = a_{p-1} \cdot q \\ a_{p+1} = a_{p-1} \cdot q^2, p > 1 \end{cases}$$

$$(a_1, a_2, ..., a_{p-1}, a_p, a_{p+1}, ...)$$

Então,

$$(a_p)^2 = (a_{p-1} \cdot q)^2 = a_{p-1} \cdot \underbrace{a_{p-1} \cdot q^2}_{a_{p+1}} = a_{p-1} \cdot a_{p+1}$$

$$\boxed{(a_p)^2 = a_{p-1} \cdot a_{p+1}}$$

Podemos dizer que tomando-se três termos consecutivos numa P.G., o termo do meio é a média geométrica dos outros dois.

2) Para quatro termos quaisquer, a_m, a_n, a_r e a_s, de uma P.G., se a soma dos índices $m+n$ é igual à soma $r+s$, então o produto $a_m \cdot a_n$ é igual ao produto $a_r \cdot a_s$.

Consideremos a P.G.

$$(5,10,20,40,80,160,320,...)$$

e observemos que:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cdot a_5 &= 5 \cdot 80 = 400 \\ a_2 \cdot a_4 &= 10 \cdot 40 = 400 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_1 \cdot a_5 = a_2 \cdot a_4$$

e

$$(1+5=2+4)$$

$$\left.\begin{aligned} a_4 \cdot a_5 &= 40 \cdot 80 = 3200 \\ a_7 \cdot a_2 &= 320 \cdot 10 = 3200 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_4 \cdot a_5 = a_7 \cdot a_2$$

e

$$(4+5=7+2)$$

Consideremos quatro termos quaisquer, a_m, a_n, a_r e a_s, de uma P.G. de razão *q,* tais que a soma dos índices $m+n$ é igual à soma $r+s$. Temos:

$$\left.\begin{aligned} a_m &= a_1 \cdot q^{m-1} \\ a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_m \cdot a_n = (a_1)^2 \cdot q^{m+n-2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_r &= a_1 \cdot q^{r-1} \\ a_s &= a_1 \cdot q^{s-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_r \cdot a_s = (a_1)^2 \cdot q^{r+s-2}$$

Como $m+n=r+s$, concluímos que:

$$a_m \cdot a_n = a_r \cdot a_s$$

Nota: a propriedade 1 pode ser deduzida a partir desta. Observemos, por exemplo, que para os termos a_5, a_6 e a_7 de uma P.G. vale que

$$(a_6)^2 = a_5 \cdot a_7 \text{ (porque } 6+6=5+7\text{)},$$

ou seja,

$$(a_6)^2 = a_5 \cdot a_7 .$$

EXERCÍCIOS

34. (PUC-SP) Se a sequência $(4x, 2x+1, x-1)$ é uma P.G., então o valor de x é:
a) -1/8
b) -8
c) -1
d) 8
e) 1/8

35. (CESGRANRIO) Se x e y são positivos e se $x, xy, 3x$ estão, nessa ordem, em progressão geométrica, então o valor de y é:
a) $\sqrt{2}$
b) 2
c) $\sqrt{3}$
d) 3
e) 9

36. (PUC-RS) Adicionando um mesmo valor a 15, 51 e 195, nessa ordem, obtém-se uma progressão geométrica. A soma do primeiro com o terceiro termo dessa progressão é:
a) 204
b) 206
c) 210
d) 214
e)216

37. (MACKENZIE) Seja x o trigésimo termo da P.G. $(2,4,8,...)$. O valor de $\log_4 x$ é:
a) 15
b) 20
c) 25
d) 30
e) 35

38. (FUVEST) O quinto e o sétimo termos de uma P.G. de razão positiva valem respectivamente 10 e 16. O sexto termo dessa P.G. é:
a) 13
b) $10\sqrt{6}$
c) 4
d) $4\sqrt{10}$
e) 10

39. (MACKENZIE) O sexto termo de uma progressão geométrica, na qual dois mios geométricos estão inseridos entre 3 e -24 , tomados nessa ordem, é:
a) -48
b) -96
c) 48
d) 96
e) 192

40. (MACKENZIE) Numa progressão geométrica de quatro termos, a soma dos termos de ordem par é 10 e a soma dos termos de ordem ímpar é 5. O quarto termo dessa progressão é:
a) 9
b) 8
c) 6
d) 15
e) 10

41. (UFES) Qual a razão de uma P.G. de três termos, em Qual a soma dos termos é 14 e o produto 64?
a) $q = 4$
b) $q = 2$
c) $q = 2$ ou $q = 1/2$
d) $q = 4$ ou $q = 1$
e) n.r.a

42. (FUVEST) Numa progressão geométrica de quatro termos positivos, a soma dos dois primeiros vale 1 e a soma dos dois últimos vale 9. Calcule a razão da progressão.
a) 3
b) 5
c) 7
d) 9
e) 11

43. (UFBA) Sendo $(40, x, y, 5, ...)$ uma progressão geométrica de razão q e $\left(q, 8-a, \frac{7}{2}, ...\right)$ uma progressão aritmética, o valor de a é:
a) 19/4
b) 21/4
c) 43/4
d) 6
e) 7

44. (PUC-SP) Numa progressão geométrica a diferença entre o 2º e o 1º termo é 9 e a diferença entre o 5º e o 4º termo é 576. O 1º termo da progressão é:
a) 3
b) 4
c) 6
d) 8
e) 9

SOMA DOS N PRIMEIROS TERMOS

Vamos calcular a soma dos 8 primeiros termos da PG (3;6;12;...).

$$S_8 = 3+6+12+24+48+96+192+384 \text{ (I)}$$

É claro que podemos somar termo a termo, mas isso poderá ser muito trabalhoso. Vejamos como obter o valor dessa soma por um modo indireto.

Multiplicando ambos os membros de (I) por 2, razão da P.G., vem:

$$2S_8 = 6+12+24+48+96+192+384+768$$

Agora, adicionando 3 aos dois membros, vem:

$$3 + 2S_8 = \underbrace{3+6+12+24+48+96+192+384}_{S_8} + 768$$

Então:

$$3 + 2S_8 = S_8 + 768 \Rightarrow 2S_8 - S_8 = 768 - 3 \Rightarrow S_8 = 765$$

De modo geral, para uma P.G. $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$, a soma dos n primeiros termos é:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$$

Multiplicando ambos os membros pela razão q, vem:

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + ... + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$$
$$S_n \cdot q = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_n \cdot q$$

Agora, adicionando a_1 a ambos os membros, vem:

$$a_1 + S_n \cdot q = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n}_{S_n} + a_n \cdot q$$

$$a_1 + S_n \cdot q = S_n + a_n \cdot q$$

Então:

$$S_n \cdot q - S_n = a_n \cdot q - a_1$$
$$S_n \cdot (q-1) = a_n \cdot q - a_1$$

e, para $q \neq 1$, concluímos que: $\boxed{S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q-1}}$

ou podemos expressar assim: $\boxed{S_n = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}}$

Observemos que, se $q = 1$, a P.G., é constante:

$$(a; a; a; a; ...),$$

a soma dos n primeiros termos é: $\boxed{S_n = n \cdot a}$

Exemplo

Calcular a soma dos 12 primeiros termos da P.G. (1; 2; 4; ...).
Temos $a_1 = 1$ e $q = 2$. Então

$$S_n = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$$

$$S_{12} = \frac{1 \cdot \left(2^{12} - 1\right)}{2-1} = 2^{12} - 1 = 4096 - 1 = 4095$$

SOMA DOS TERMOS DE UMA PG INFINITA

Iniciaremos o assunto que vamos estudar agora com uma experiência, onde usamos um pedaço de barbante (de comprimento *l*) e uma tesoura para cortá-lo:

cortamos o barbante exatamente ao meio e guardamos uma das partes no bolso;

com o outro pedaço repetimos a operação: cortamos ao meio e guardamos metade no bolso;

continuamos fazendo assim sucessivamente, sempre cortando ao meio o pedaço que sobrou e guardando metade no bolso.

O pedaço de barbante que fica em nossas mãos vai diminuindo e pode ficar tão pequeno quanto quisermos. Dizemos que seu comprimento tende a zero ou que tem limite igual a zero.

Por outro lado, o barbante inicial vai ficando guardado inteiro em nosso bolso (claro que em pedacinhos!). Se somarmos os comprimentos das partes que guardamos, essa soma vai ficando cada vez mais próxima do comprimento *l* do barbante inicial e pode ficar tão próxima de *l* quanto quisermos. Dizemos que essa soma tende a *l* ou que tem limite igual a *l*.

Note que neste caso há 2 sequências, a primeira delas que representa a parte que sobra, ou seja, a que não colocamos no bolso é a P.G. infinita:

$$\left(\frac{l}{2},\frac{l}{4},\frac{l}{8},...\right)$$

Seus termos vão diminuindo, tendendo a zero. Nessa P.G. temos $a_1=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$ e $a_n \to 0$ (leia: a_n tende a zero).

Na outra sequência,

O 1º termo é igual ao 1º termo da P.G.: $\frac{l}{2}$

O 2º termo é igual à soma dos 2 primeiros termos da P.G:

$$\frac{l}{2}+\frac{l}{4}$$

O 3º termo é igual à soma dos 3 primeiros termos da P.G.

$$\frac{l}{2}+\frac{l}{4}+\frac{l}{8}$$

E assim por diante. Essa é a chamada sequência das somas parciais da P.G. acima. O seu termo geral é a soma S_n dos *n* primeiros termos da P.G.

Como $S_n=\frac{a_n\cdot q-a_1}{q-1}$, quando a_n tende a zero, temos que

$$S=\frac{0-a_1}{q-1}=\frac{a_1}{1-q}.$$

Logo, em nosso caso, S_n tende a

$$S=\frac{\frac{l}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{l}{2}}{\frac{1}{2}}=l$$

conforme já havíamos concluído.

De modo geral, toda P.G. de termos reais $(a_1;a_2;a_3;...)$ e com razão *q* compreendida entre -1 e 1 $(-1<q<1)$ apresenta os termos tendendo a zero $(a_n\to 0)$.

Nesse caso, a soma S_n dos *n* primeiros termos tende ao número *S* dado por:

$$\boxed{S=\frac{a_1}{1-q}}$$

O número *S* é chamado limite da soma dos termos da P.G. e indicado também por $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ (leia: limite de S_n quando *n* tende a infinito). Portanto:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S=\frac{a_1}{1-q}$$

Exemplo

Calcular o limite da soma dos termos de cada P.G..

a) $\left(2;\frac{1}{2};\frac{1}{8};\frac{1}{32};...\right)$

b) $\left(-3;-1;-\frac{1}{3};-\frac{1}{9};...\right)$

c) $\left(1;-\frac{1}{2};\frac{1}{4};-\frac{1}{8};...\right)$

Notemos, inicialmente, que em cada P.G. dada a razão compreendida entre -1 e 1 (e que em cada uma delas os termos tendem a zero, isto é, $a_n\to 0$). Então o limite da soma dos termos é:

em a) $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{8}{3}$

em b) $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{-3}{1-\frac{1}{3}}=-\frac{9}{2}$

em c) $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{2}$

SÉRIE GEOMÉTRICA

Consideremos uma P.G. infinita $(a_1,a_2,a_3,a_4,...)$ cujos termos são números reais.

A soma indicada dos termos dessa P.G. infinita é:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+...,$$

chamada de série geométrica.

Se a razão *q* da P.G. é tal que $-1<q<1$, dizemos que a série é convergente e que sua soma é

$$S=\frac{a_1}{1-q}.$$

Nesse caso, indicamos:

$$\boxed{a_1+a_2+a_3+a_4+...=\frac{a_1}{1-q}}$$

Quando a P.G. tem termos não nulos e razão $q \geq 1$ e $q \leq -1$, dizemos que a série é <u>divergente</u>. Uma série divergente possui soma igual a infinito (∞).

Exemplos

1) a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...$ é uma série convergente. A soma é:

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$$

b) $1+2+4+8+16...$ é uma série divergente, logo possui soma igual a infinito. $S=\infty$.

2) Resolver a equação $x+\frac{x}{3}+\frac{x}{9}+\frac{x}{27}+...=3$.

Trata-se de uma série geométrica, em que $a_1 = x$ e $q=\frac{1}{3}$, com soma igual a 3. Então: $S=\frac{a_1}{1-q}=3 \Rightarrow \frac{x}{1-\frac{1}{3}}=3 \Rightarrow \frac{x}{\frac{2}{3}}=3 \Rightarrow x=\frac{2}{3}\cdot 3=2$

Exercícios

45. (PUC-SP) Somando os n primeiros termos da sequência $(1,-1,1,-1,...)$ encontramos:
a) n
b) $-n$
c) 0
d) 1
e) 0 quando n é par; 1 quando n é ímpar.

46. (FESP) A soma dos seis primeiros termos da P.G. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{12},...\right)$ é:
a) 12/33
b) 15/32
c) 21/33
d) 21/32
e) 2/3

47. Os termos extremos de uma progressão geométrica crescente são 1 e 243. Se a soma dos termos dessa progressão é 364, a razão e o número de termos são, respectivamente:
a) 1/3 e 5
b) 1/3 e 6
c) 3 e 5
d) 3 e 6
e) 5 e 3

48. (EAESP-FGV) A soma $1+a+a^2+...+a^{n-1}$ é igual a:
a) $\frac{1}{a-1}$
b) $\frac{a^2(a+1)}{a-1}$
c) $\frac{a^n-1}{a-1}$
d) $\frac{a^{n-1}}{a-1}$
e) $\frac{a^{n-1}-1}{a-1}$

49. (UECE) Seja $(a_1,a_2,a_3,...)$ uma progressão geométrica de razão 3. Se $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=1456$, então $a_2 \cdot a_3$ é igual a :
a) 234
b) 276
c) 428
d) 432

FRENTE DOIS

1. CÁLCULO ALGÉBRICO E FATORAÇÃO

POTENCIAÇÃO

Toda potência pode ser escrita na forma a^n. Dizemos que esta potência tem base *a* e expoente *n*.

Veremos algumas regras da potenciação, sendo $a \in \mathbb{R}$:

1) Para $n = 1$: $a^1 = a$

2) Para $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n fatores}}$

3) Para $n \in \mathbb{Z}_+^*$: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

PROPRIEDADES DA POTENCIAÇÃO

Sendo *a* e *b* reais positivos e não nulos, valem as seguintes propriedades:

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

3) $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$

4) $\left(a \cdot b\right)^n = a^n \cdot b^n$

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

6) $a^0 = 1$

EXERCÍCIO

1. Calcule:

a) 2^3

b) 10^5

c) $(-3)^2$

d) -3^2

e) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^3$

f) $\left(-\dfrac{3}{10}\right)^4$

g) $(0,2)^3$

h) 3^{-3}

i) $(-1)^{-2}$

j) $\left(\dfrac{11}{13}\right)^0$

RADICIAÇÃO

Todo radical pode ser escrito na forma $\sqrt[n]{a}$. Dizemos que este radical tem índice *n* e radicando *a*.

Veremos algumas regras da radiciação, sendo *a* e *b* números reais estritamente positivos, *n* e *m* naturais e não-nulos:

1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

5) $\sqrt[p \cdot n]{a^{p \cdot m}} = \sqrt[n]{a^m}$

É ERRADO dizermos que $\sqrt{4} = -2$, mesmo sabendo que $(-2)^2 = 4$.

EXERCÍCIOS

2. Calcule

a) $\left(\sqrt{3}\right)^2$

b) $\left(\sqrt{5}\right)^4$

c) $\left(\sqrt{7}\right)^{-2}$

d) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}$

3. Simplifique:

a) $\left(\sqrt{3}\right)^5$

b) $3\left(\sqrt{2}\right)^3$

c) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$

d) $\sqrt{\sqrt{3}}$

e) $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$

4. Marque verdadeiro (V) ou falso (F):

( ) $\sqrt{3\sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{3}}$

( ) $\sqrt{3\sqrt{2}} > \sqrt{2\sqrt{3}}$

( ) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = \sqrt{3}$

( ) $\dfrac{\sqrt{-18}}{\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$

( ) $\sqrt[3]{2^4} = \sqrt[6]{4^4}$

5. Simplificar:

a) $\sqrt{20} + \sqrt{45} =$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} =$

c) $\sqrt{15 + \sqrt{50\sqrt{2 + \sqrt{1 + \sqrt{5 + \sqrt{15 + 219^0}}}}}} =$

6. A expressão $2\sqrt{5} + 2\sqrt{20} - 2\sqrt{45}$ é numericamente igual a:

a) $2\sqrt{5}$ b) $-2\sqrt{5}$ c) 0 d) $4\sqrt{5}$ e) $-4\sqrt{5}$

7. Qual é a alternativa que coloca os números $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[4]{6}$ em ordem crescente corretamente?

a) $\sqrt{3},\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt[4]{6}$ b) $\sqrt[3]{5},\ \sqrt{3},\ \sqrt[4]{6}$ c) $\sqrt[4]{6},\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt{3}$

d) $\sqrt[3]{5},\ \sqrt[4]{6},\ \sqrt{3}$ e) $\sqrt{3},\ \sqrt[4]{6},\ \sqrt[3]{5}$

8. (FUVEST) $\sqrt[3]{\dfrac{2^{28}+2^{30}}{10}} =$

a) $\dfrac{2^8}{5}$ b) $\dfrac{2^9}{5}$ c) 2^8 d) 2^9 e) $\left(\dfrac{2^{58}}{10}\right)^{\frac{1}{3}}$

RACIONALIZAÇÃO DO DENOMINADOR DE UMA FRAÇÃO

Racionalizar o denominador de uma fração é construir uma fração equivalente à primeira, porém que não contenha radicais em seu denominador, por exemplo:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

POTÊNCIA DE EXPOENTE RACIONAL

Sendo $a > 0$, m e n inteiros e $n > 0$, então:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Exemplos:

$$7^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{7^5}$$

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

RADICAIS COM RADICANDO NEGATIVO

Sendo $a \in \mathbb{R}_-^*$ e n natural par, NÃO existe número real b que satisfaça a condição: $\sqrt[n]{a} = b$.

Caso seja n natural ímpar, então:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

EXERCÍCIOS

9. Racionalizar os denominadores:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} =$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}} =$

c) $\dfrac{2}{3\sqrt{5}} =$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} =$

10. Calcular:

a) $9^{\frac{1}{2}} + 32^{\frac{1}{5}} - 8^{\frac{2}{3}} =$

b) $1024^{-\frac{1}{10}} + 8^{\frac{2}{3}} =$

11. Efetuando $\left(\sqrt[3]{-8}\right)^3 + \sqrt[4]{(-16)^4}$, obtemos:

a) -8 b) 4 c) -24 d) 8 e) -4

PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA

$$\boxed{a(b+c) = ab + ac}$$

$$\boxed{(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd}$$

PRODUTOS NOTÁVEIS

Vejamos as seguintes potências de binômios (expressões matemáticas com dois termos), onde a e b são números reais:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b\\ &= a^2 + 2ab + b^2\\ (a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a\cdot a - a\cdot b - b\cdot a + b\cdot b\\ &= a^2 - 2ab + b^2\\ (a+b)(a-b) &= a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Temos então que:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

EXERCÍCIOS

12. Calcule:

a) $(x+y)^2 =$

b) $(x+3)^2 =$

c) $(2+3x)^2 =$

d) $(3a-1)^2 =$

e) $(a+3)(a-3) =$

f) $(x-2)(2+x) =$

g) $(x-yzw)^2 =$

h) $\left(a^2+b^2c\right)^2 =$

13. Calcule seguindo o exemplo:
a) $12 \cdot 8 = (10+2)(10-2) = 10^2 - 2^2 = 96$
b) $45 \cdot 35 =$
c) $93 \cdot 107 =$

Observe também a seguinte multiplicação:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\ &= a\cdot a^2 + a\cdot 2ab + a\cdot b^2 + b\cdot a^2 + b\cdot 2ab + b\cdot b^2 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

De modo análogo, temos que:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Exercícios

14. Desenvolva
a) $(x+y)^3$
b) $(x-2)^3$
c) $(x+a)^3$
d) $(2a-x)^3$

FATORAÇÃO

Fatorar é escrever uma soma de expressões algébricas em produto.

Fator comum

Se tivermos, por exemplo, a soma $ab+ac$, podemos verificar que o fator a aparece em seus dois termos, portanto o colocamos em evidência da seguinte forma:

$$ab + ac = a(b+c)$$

Observe que se aplicarmos a propriedade distributiva ela deve retornar à forma anterior. Veja os seguintes exemplos:

1) $xy^2 + x^2y$. Podemos escrever os mesmos termos da seguinte forma:

$$x\cdot y\cdot y + x\cdot x\cdot y$$

Observamos que há um fator x e um fator y nos dois membros, então nós os colocamos em evidência:

$$xy^2 + x^2y = xy(y+x)$$

2) $ab + abz$. Neste caso, ab é fator comum, então:

$$ab\cdot 1 + abz = ab(1+z)$$

<u>Observação</u>: é importante repararmos que o número 1 é indispensável para que o seu valor não seja alterado.

Trinômio quadrado perfeito

Já tivemos contato com o trinômio quadrado perfeito quando falamos de produtos notáveis. Vimos que o quadrado de $(a+b)$ é igual a $a^2+2ab+b^2$, que é um *trinômio quadrado perfeito*.

Para fatorarmos este trinômio quadrado perfeito apenas nos é necessário fazer o "caminho inverso", portanto:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

De forma análoga temos que:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Diferença de quadrados

Também foi visto que $(a+b)(a-b)$ é igual a a^2-b^2. Portanto temos que:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Exemplos:

1)
$8^2 - 6^2 = (8-6)\times(8+6)$
$64 - 36 = (2)\times(14)$
$28 = 28$

2)
$29^2 - 28^2 = (29-28)\times(29+28)$
$841 - 784 = (1)\times(57)$
$57 = 57$

Uma de suas utilizações consiste em racionalizar um denominador que é constituído de uma parte irracional e outra que pode ser tanto irracional como racional.

Exemplos:

1) $$\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{3}-5\sqrt{2}$$

2) $$\frac{7}{3-\sqrt{2}} = \frac{7}{3-\sqrt{2}} \times \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{7(3+\sqrt{2})}{(3)^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{7(3+\sqrt{2})}{9-2} =$$
$$= \frac{7(3+\sqrt{2})}{7} = 3+\sqrt{2}$$

EXERCÍCIOS

15. Fatore:
a) $xy^2z^3 + x^3y^2z =$
b) $ab + b + a + 1 =$
c) $a^2b - bc^2 =$
d) $x^2 + 2xy + y^2 =$
e) $-a^2 + 2ab - b^2 =$
f) $z^2 + 4zw + 4w^2 =$
g) $2a^2c + 4abc + 2b^2c =$

SOMA E DIFERENÇA DE CUBOS

Conhecemos a seguinte identidade:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Utilizando esta identidade e fatorando o que for necessário, isolamos o que queremos que é a soma de cubos:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 \\ &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\ &= (a+b)\left[(a+b)^2 - 3ab\right] \\ &= (a+b)\left(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab\right) \\ &= (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) \end{aligned}$$

Usando o mesmo raciocínio, concluímos que:

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

EXERCÍCIOS

16. Fatore
a) $s^3 - t^3 =$
b) $8x^3 - y^3 =$
c) $a^3 - 64 =$
d) $x^6 - y^3 =$

17. Racionalize os denominadores
a) $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} =$
b) $\dfrac{7}{\sqrt{3} - 1} =$

2. PORCENTAGEM

"Usando estatísticas mais criteriosas, pode-se chegar à conclusão de que, no Brasil, 26 por cento (26%) de toda a população economicamente ativa, em idade de trabalhar, está sem nenhuma atividade."
João Pedro Stedile/MST (Caros Amigos, Fevereiro de 2004)

Na frase acima o escritor afirma que 26 pessoas a cada 100 (26 por cento ou $\frac{26}{100}$) da população economicamente ativa está sem trabalho algum.

O município de São Paulo, de acordo com o CENSO 2000, tem aproximadamente 10 milhões de habitantes. Se levarmos em consideração a porcentagem de pessoas desempregadas do texto e que todas são economicamente ativas, quantas pessoas estão sem atividade em São Paulo?

Temos 26 pessoas a cada 100 e x pessoas a cada 10 milhões, então:

$$\frac{x}{10} = \frac{26}{100} \Rightarrow x = 10 \cdot \frac{26}{100} \Rightarrow x = 2,6$$

Portanto, na cidade de São Paulo há 2,6 milhões de pessoas sem trabalho.

Exemplos

1) Numa sala de 80 alunos, 90% deles foram aprovados, qual foi o número de aprovados?

90 alunos a cada 100 são aprovados, então x em 80 foram aprovados, portanto vamos calcular *90% de 80:*

$$\frac{x}{80} = \frac{90}{100} \Rightarrow x = 80 \cdot \frac{90}{100} \Rightarrow x = 72$$

Logo, foram aprovados 72 alunos.

2) Calcule:

a) 20% de 250: $\frac{x}{250} = \frac{20}{100} \Rightarrow x = \frac{20}{100} \cdot 250 \Rightarrow x = 50$

Repare que poderíamos ir para o segundo passo diretamente, como faremos no item a seguir.

b) 32% de 300: $x = \frac{32}{100} \cdot 300 \Rightarrow x = 96$

c) 20% de 40%: $x = \frac{20}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{8}{100} = 8\%$

EXERCÍCIOS

1. Calcule

a) 20% de 300

b) 20% de 10%

c) $\sqrt{4\%}$

2. Numa sala de 80 alunos, 24 alunos foram reprovados. A porcentagem de reprovação foi de:

a) 15% b) 20% c) 28% d) 30% e) 34%

3. Se de 1000 carros produzidos numa fábrica, 5 não passam pelo teste de qualidade, qual é a porcentagem de carros que não podem ser vendidos?

a) 1%
b) 2%
c) 0,5%
d) 0,05%
e) 5%

AUMENTO E DESCONTO PERCENTUAL

Em diversas situações, nos deparamos com problemas onde a taxa percentual aumenta ou diminui.

Exemplos:

1) Se uma mercadoria custa R$50,00, então após um aumento de 20%, quanto ela passará a custar?

O aumento é 20% de 50 = $\frac{20}{100} \cdot 50 = 10$

O preço final é de $50 + 10 = 60$ (R$60,00)

Repare que:

$$50 + \frac{20}{100} \cdot 50 = 50 + 0,2 \cdot 50 = 50(1 + 0,2) = 50 \cdot 1,2 = 60$$

Portanto se quisermos aumentar 20%, basta multiplicarmos por 1,2.

Se aumentássemos então 42%, multiplicaríamos por 1,42 e se aumentássemos 7% multiplicaríamos por 1,07 e assim por diante.

2) Qual o preço de uma mercadoria que custava R$80,00 e teve um aumento de 40%?

$1,4 \cdot 80 = 112$ (R$112,00)

3) Se a mesma mercadoria do exemplo 01 tivesse uma redução em seu preço de 30% qual seria o seu valor final?

O desconto é 30% de 50 = $0,3 \cdot 50 = 15$

O preço final é de $50 - 15 = 35$ (R$35,00)

Então:

$$50 - 0,3 \cdot 50 = 50(1 - 0,3) = 50 \cdot 0,7 = 35$$

Portanto se quisermos descontar 30%, basta multiplicarmos por 0,7.

Se descontássemos 42%, multiplicaríamos por 0,58, se descontássemos 7%, multiplicaríamos por 0,93 e assim sucessivamente.

4) Qual o preço de uma mercadoria que custava R$80,00 e teve um desconto de 40%.

$$(1 - 0,4) \cdot 80 = 0,6 \cdot 80 = 48$$

5) Um banco cobra uma taxa de juros de 10% ao mês sobre um empréstimo. Se uma pessoa emprestou R$1000,00, quanto ela tem de pagar no final do 2º mês?

O primeiro aumento é 10% de 1000 = 100

No final do primeiro mês o valor a ser pago é de 1000 + 100 = 1100 reais.

O segundo aumento é 10% de 1100 = 110

No final do segundo mês o valor a ser pago é de 1100 + 110 = 1210 reais.

Repare que no primeiro mês:

$$V_1 = 1000 + 0,1 \cdot 1000 = 1000(1 + 0,1) = 1000 \cdot 1,1 = 110$$

e no segundo:

$$V_2 = V_1 + 0,1 \cdot V_1 = V_1(1 + 0,1) = 1,1 \cdot V_1 = 1,1 \cdot 1100 = \underbrace{1,1}_{2^o\ aumento} \cdot \underbrace{1,1}_{1^o\ aumento} \cdot 1000 =$$

$$= (1,1)^2 \cdot 1000 = 1210$$

Portanto se quisermos saber quanto pagaria no terceiro mês bastava calcular:

$$(1{,}1)^3 \cdot 1000 = 1331$$

Generalizando temos:

$$V_f = V_i(1 \pm p)$$

onde V_f é o valor final, V_i é o valor inicial e p é o percentual que foi acrescentado (+) ou diminuído (-).

EXERCÍCIOS

4. Uma mercadoria que custava R$300,00 teve um aumento passando a custar R$324,00. A majoração sobre o preço antigo foi de:
a) 6%
b) 8%
c) 12%
d) 18%
e) 80%

5. Uma mercadoria que custava R$2000,00 teve três aumentos sucessivos de 10% cada um. Calcule:
a) O preço dessa mercadoria após os três aumentos.

b) O aumento porcentual total em relação ao preço inicial.

6. No dia 1º de maio de 2004, o salário mínimo aumentou de R$240,00 para R$260,00. A porcentagem do aumento foi de aproximadamente
a) 7%
b) 8%
c) 9%
d) 10%
e) 11%

7. (VUNESP-2003) Um advogado, contratado por Marcos, consegue receber 80% de uma causa avaliada em R$200.000,00 e cobra 15% da quantia recebida, a título de honorários. A quantia, em reais, que Marcos receberá, descontada a parte do advogado, será de
a) 24000
b) 30000
c) 136000
d) 160000
e) 184000

8. (VUNESP-2004) Uma pesquisa realizada com pessoas com idade maior ou igual a sessenta anos residentes na cidade de São Paulo, publicada na revista Pesquisa/Fapesp de maio de 2003, mostrou que, dentre os idosos que nunca frequentaram a escola, 17% apresentam algum tipo de problema cognitivo (perda de memória, de raciocínio e de outras funções cerebrais). Se dentre 2000 idosos pesquisados, um em cada cinco nunca foi à escola, o número de idosos pesquisados nessa situação e que apresentam algum tipo de problema cognitivo é:
a) 680
b) 400
c) 240
d) 168
e) 68

9. (UNIFESP-2004) Num determinado local, o litro de combustível, composto de 75% de gasolina e 25% de álcool, é comercializado ao preço de R$ 2,05, sendo o litro de álcool comercializado ao preço de R$ 1,00. Se os preços são mantidos proporcionais, o preço do litro de gasolina é:
a) R$ 2,15
b) R$2,20
c) R$ 2,30
d) R$ 2,40
e) R$ 3,05

10. (MACK-2004) Um objeto é vendido em uma loja por R$26,00. O dono da loja, mesmo pagando um imposto de 20% sobre o preço de venda, obtém um lucro de 30% sobre o preço de custo. O preço de custo desse objeto é:
a) R$ 16,00
b) R$ 14,00
c) R$ 18,00
d) R$ 14,80
e) R$ 16,80

11. (FUVEST-2004) Um reservatório com 40 litros de capacidade já contém 30 litros de uma mistura gasolina/álcool com 18% de álcool. Deseja-se completar o tanque com uma nova mistura gasolina/álcool de modo que a mistura resultante tenha 20% de álcool. A porcentagem de álcool nessa nova mistura deve ser de:
a) 20%
b)22%
c) 24%
d) 26%
e) 28%

12. (UNIFESP-2003) Com relação à dengue, o setor de vigilância sanitária de um determinado município registrou o seguinte quadro, quanto ao número de casos positivos:
– em fevereiro, relativamente a janeiro, houve um aumento de 10% e
– em março, relativamente a fevereiro, houve uma redução de 10%.

Em todo o período considerado, a variação foi de
a) -1%.
b) -0,1%.
c) 0%.
d) 0,1%.
e) 1%.

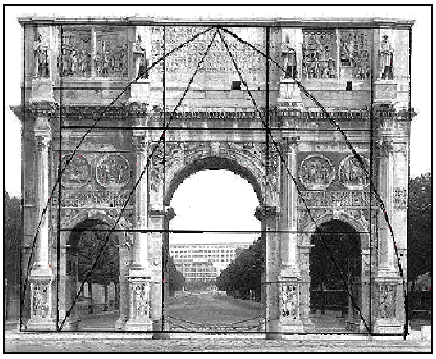
13. (UNIFESP-2003) Uma empresa brasileira tem 30% de sua dívida em dólares e os 70% restantes em euros. Admitindo-se uma valorização de 10% do dólar e uma desvalorização de 2% do euro, ambas em relação ao real, pode-se afirmar que o total da dívida dessa empresa, em reais,
a) aumenta 8%.
b) aumenta 4,4%.
c) aumenta 1,6%.
d) diminui 1,4%.
e) diminui 7,6%.

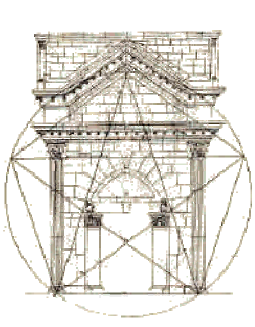
14. (MACK-2003) Numa loja, um determinado produto de preço p é posto em promoção do tipo "leve 5 e pague 3". O desconto que a promoção oferece sobre o preço p do produto é de:
a) 40%
b) 35%
c) 30%
d) 25%
e) 20%

3. SEMELHANÇA DE TRIÂNGULO

CONTEXTO HISTÓRICO

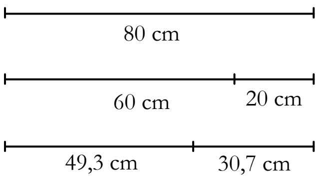
DIVISÃO ÁUREA





"Em que consiste a divisão áurea de um segmento?"

Explicaremos de modo elementar, esse curioso problema de Geometria. Primeiro, tomaremos, como exemplo, um segmento de 80cm de comprimento e o dividiremos em duas partes desiguais, tendo a maior 60cm e a menor 20cm.



Calculamos então a razão entre o segmento todo e a maior parte; para isto, dividimos 80 por 60 e achamos: 80 / 60 = 1,33.

Dividindo a parte maior pela menor teremos: 60 / 20 = 3.

Desta forma, podemos notar que os resultados não são iguais.

O primeiro quociente é 1,33 e o segundo é 3.

Então, dividimos o segmento dado em duas partes tais que o segmento total (80) dividido pela maior parte dê o mesmo resultado que a maior parte dividida pela menor.

No exemplo proposto, a solução será obtida se dividirmos o segmento de 80cm em duas partes medindo respectivamente 49,3cm e 30,7cm. Podemos verificar:

80/49,3=1,61 ------- 49,3/30,7=1,61

Daí a proporção:

Segmento total/Parte maior = Parte maior/Parte menor

Lê-se: o segmento total está para a parte maior assim como a parte maior está para a parte menor.

A divisão de um segmento feita segundo essa proporção denomina-se divisão áurea ou divisão em média e extrema razão. Na divisão áurea a parte maior é denominada segmento áureo. O número que exprime sempre a relação entre o segmento áureo tem o seguinte valor aproximado 1,618. Esse número é, em geral, designado pela letra grega (φ).

É evidente que se quiséssemos dividir um segmento AB em duas partes desiguais, teríamos uma infinidade de maneiras. Há uma, porém, que parece ser a mais agradável ao espírito, como se traduzisse uma operação harmoniosa para os nossos sentidos - é a divisão em média e extrema razão, a sectio divina de Lucas Paccioli, também denominada sectio áurea por Leonardo da Vinci.

O matemático alemão Zeizing formulou, em 1855, o seguinte princípio:

'Para que um todo dividido em duas partes desiguais pareça belo do ponto de vista da forma, deve apresentar entre a parte menor e a maior a mesma relação que entre esta e o todo. '

Até hoje, não se conseguiu descobrir a razão do "porquê" dessa beleza. Zeizing, que levou até muito longe os estudos, aponta vários e curiosos exemplos que constituem uma eloquente demonstração para o princípio da sectio áurea.

É fácil observar que o título posto na lombada de uma obra divide, em geral, o comprimento total do livro em média e extrema razão. O mesmo acontece com a linha dos olhos que divide, nas pessoas bem conformadas, o comprimento total do rosto em média e extrema razão. Observa-se também a sectio divina nas partes em que as falanges dividem os dedos das mãos.

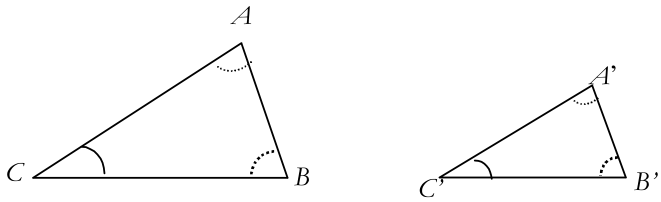
A divisão áurea aparece ainda na Música, na Poesia, na Pintura e até na Lógica.

"Uma relação notável - demonstrada em Geometria - define o lado do decágono regular como sendo o segmento áureo do raio."

(Texto extraído do livro "Matemática Divertida e Curiosa" de Malba Tahan, Editora Record)

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Na figura abaixo, considere a correspondência vértice a vértice, $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$:



Suponha que

$$\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \text{ e } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Neste caso dizemos que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes (notação $\Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$) e, a correspondência considerada, é uma correspondência de semelhança. Pela definição, temos que para dois triângulos serem semelhantes, estes precisam satisfazer duas condições:

1) os ângulos de vértices correspondentes são congruentes;

2) os lados correspondentes são proporcionais.

Observação:

Ângulos correspondentes são aqueles que têm vértices correspondentes.

Lados correspondentes são aqueles que têm suas extremidades em vértices correspondentes.

Como podemos notar, a razão $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ é uma constante, ou seja, é sempre igual, essa constante os matemáticos chamam de razão de semelhança e usualmente denominam com a letra *k*.

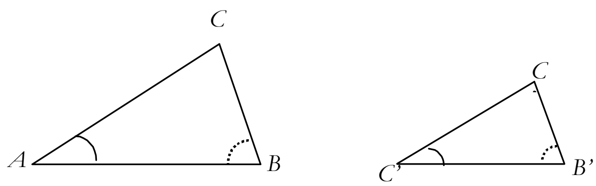
Esta última observação é muito importante, pois diversos exercícios trabalham com a razão de semelhança. A seguir veremos os casos de semelhança.

1ºcaso (AA): ângulo-ângulo

Se dois triângulos têm dois ângulos de vértices correspondentes congruentes então, esses triângulos são semelhantes.

Como mostra a figura $\hat{A} = \hat{C}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$ assim, pelo caso ângulo-ângulo de semelhança temos que:

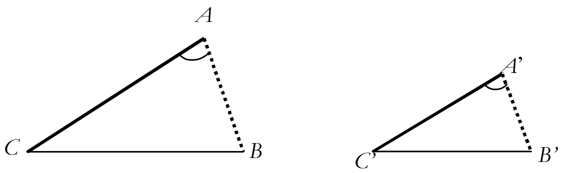
$$\Delta ABC \approx \Delta CB'C'$$



2ºcaso (LAL): lado-ângulo-lado

Se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos determinados por esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

Como mostra a figura, $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ assim, pelo caso lado-ângulo-lado de semelhança temos que: $\Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$

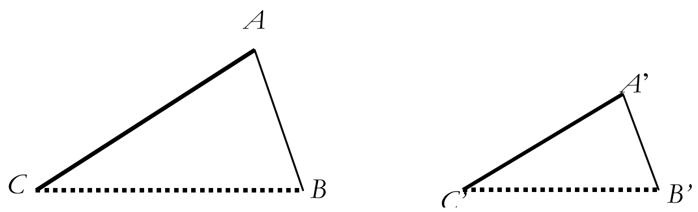


3ºcaso (LLL): lado-lado-lado

Se em dois triângulos os lados correspondentes são proporcionais então, esses triângulos são semelhantes.

Como mostra a figura, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$, logo pelo caso lado-lado-lado de semelhança temos que:

$$\Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$$

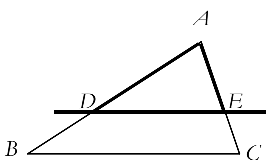


TEOREMA FUNDAMENTAL

Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

Na figura, $\overline{DE} // \overline{BC}$ e pelo Teorema Fundamental temos:

$$\Delta ABC \approx \Delta ADE$$

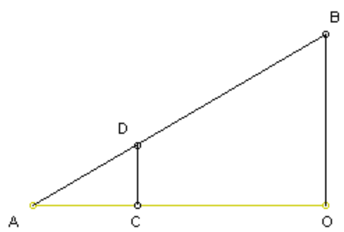


CURIOSIDADE

"Tales de Mileto mediu a distância de um navio à praia, usando provavelmente, semelhança de triângulos".

Para medir esta distância procederemos assim: a partir de um ponto O na praia, fixemos o olhar ao navio B. Traça-se uma perpendicular OA a OB.

De A fixemos o olhar a B. Por um ponto C, escolhido na base OA, traça-se uma reta paralela ao OB, que será, perpendicular à base.



Os triângulos ACD e AOB são semelhantes, logo:

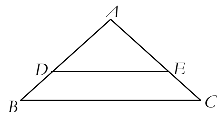
$$\frac{OB}{OA} = \frac{CD}{CA}$$

Como as distâncias podem ser medidas ao longo da praia, pode-se calcular a distância OB. "Generalizando, a base e o olhar para o navio podem ser quaisquer, não necessariamente perpendiculares, desde que os ângulos do olhar para o navio e o comprimento da base sejam conhecidos."

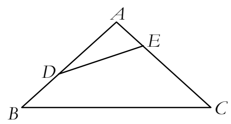
(Texto de: Valéria Ostete Jannis Luchetta; supervisão e orientação: prof. Doutor Francisco César Polcino Milies)

EXERCÍCIOS

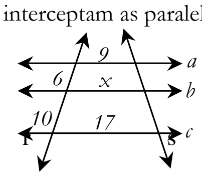
1. No triângulo ABC da figura, o segmento $\overline{DE}$ é paralelo ao lado $\overline{BC}$. Sendo $AB = 15cm$, $AC = 12\ cm$, $BC = 21cm$ e $BD = 5\ cm$, então $\overline{DE}$, em cm, mede ?



2. Na figura os triângulos AED e ABC são tais que $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{5}{7}$. Se $\overline{BC} = 21cm$, então $\overline{DE}$, em cm, mede:



3. Calcular o valor de x na figura, sabendo-se que r e s são transversais que interceptam as paralelas a, b e c.



4. (CESGRANRIO) Considere um paralelogramo $ABCD$. Sendo M o ponto médio do lado $\overline{AD}$ e O o ponto de intersecção do segmento $\overline{MC}$ com a diagonal $\overline{BD}$, tem-se:

a) $\dfrac{DO}{OB} = \dfrac{1}{3}$

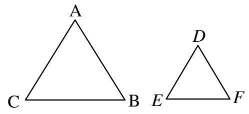
b) $\dfrac{DO}{OB} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

c) $\dfrac{DO}{OB} = \dfrac{2}{3}$

d) $\dfrac{DO}{OB} = \dfrac{1}{2}$

e) $\dfrac{DO}{OB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

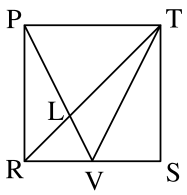
5. Dados: ΔABC e ΔDEF são isósceles de bases $\overline{BC}$, $\overline{EF}$ respectivamente, e $\hat{A} = \hat{D}$. Demonstre que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



6. Dados: ΔABC tem perímetro *85 cm*, ΔDEF tem lado DE = *7 cm*, $\hat{B} = \hat{E}$ e $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = 5$. Calcular AB e $DF+EF$.

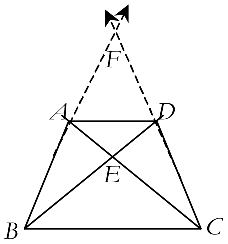
7. Dois triângulos são semelhantes e uma altura do primeiro é 2/3 de sua correspondente no segundo. Sendo *140 cm* o perímetro do primeiro, calcular o perímetro do segundo triângulo.

8. Dados: $PRST$ é um retângulo, ΔPVT é equilátero e tem V em $\overline{RS}$, $\overline{PV}$ intercepta $\overline{RT}$ em L, $PT = 6$ e $TR = 3\sqrt{7}$.
Calcular:
a) LV
b) LT



9. Um triângulo de perímetro 42 tem os lados com medidas respectivamente proporcionais às medidas *3, 5* e *6* dos lados de um segundo triângulo. Calcular as medidas do primeiro triângulo.

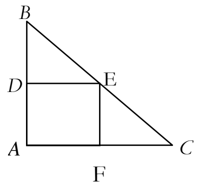
10. Dados: $ABCD$ é trapézio de bases $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, e $\overline{AC}$ intercepta $\overline{BD}$ em E, $\overline{BA}$ intercepta $\overline{CD}$ em F, $BC = 18$ *cm*, $BE = 12$ *cm*, $CE = 9$ *cm* e $AE = 3$ *cm*.



Calcular: AD, DE *e* $\frac{FA}{FB}$.

11. (FUVEST) A sombra de um poste vertical, projetada pelo sol sobre o chão plano, mede 12 *m*. Nesse mesmo instante, a sombra de um bastão de 1 *m* de altura, mede *0,6 m*. A altura do poste é, em metros:
a) 6
b) 7,2
c) 12
d) 20
e) 72

12. (FUVEST) Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A, $ADEF$ é um quadrado, $AB = 1$ e $AC = 3$. Quanto mede o lado do quadrado?



a) 0,70
b) 0,75
c) 0,80
d) 0,85
e) 0,90

4. RELAÇÕES MÉTRICAS NUM TRIÂNGULO RETÂNGULO

CONTEXTO HISTÓRICO

Pitágoras de Samos

"Pitágoras nasceu em Samos, uma das ilhas do Dodecaneso, na Grécia e provavelmente recebeu instrução matemática e filosófica de Tales e de seus discípulos. Após viver algum tempo entre jônicos, viajou pelo Egito e Babilônia - possivelmente indo até a Índia. Durante suas peregrinações, ele absorveu não só informações matemáticas e astronômicas como também muitas ideias religiosas. Quando voltou ao mundo grego, Pitágoras estabeleceu-se em Crotona, na Magna Grécia (na costa sudoeste da atual Itália), onde fundou a *Escola Pitagórica* dedicada a estudos religiosos, científicos e filosóficos. À Pitágoras são atribuídas várias descobertas sobre as propriedades dos números inteiros, a construção de figuras geométricas e a demonstração do teorema que leva seu nome (cujo enunciado já era conhecido pelos babilônios). Os próprios termos *Filosofia* (amor à sabedoria) e *Matemática* (o que é aprendido) seriam criações de Pitágoras para descrever suas atividades intelectuais.

Os membros da *Escola Pitagórica* recebiam uma educação formal, onde constavam quatro disciplinas: Geometria, Aritmética, Astronomia e Música, que constituíram as artes liberais e cujo conteúdo tornou-se conhecido na Idade Média como o Quadrivum, que era considerado a bagagem cultural necessária de uma pessoa bem educada. Os pitagóricos elevaram a matemática à categoria das ciências liberais, isto é, tornaram-na independente das necessidades práticas e a transformara-na em uma atividade puramente intelectual.

Na filosofia pitagórica afirmava-se que *Tudo é número*, ou seja, na concepção cosmogônica dos primeiros pitagóricos a extensão era descontínua, constituída de unidades indivisíveis separadas por um intervalo. Esta ideia provinha do estudo dos números naturais que, quando aplicada aos objetos geométricos requeria que todas as medidas pudessem ser expressas na forma de razão de inteiros, isto é, pudessem ser mensuradas, tendo por base um segmento fixado como unitário. Mas eles notaram que a diagonal de um quadrado cujos lados medem uma unidade é igual a $\sqrt{2}$ e que este número é incomensurável (hoje chamamos de números irracionais). Esta descoberta foi recebida com grande consternação pelos pitagóricos, pois em certo sentido contrariava as crenças da escola e seria uma imperfeição da divindade.

No estudo de sons musicais em cordas esticadas (com a mesma tensão relativa), descobriram as regras que relacionavam a altura da nota emitida com o comprimento da corda, concluindo que as relações que produziam sons harmoniosos seguiam a proporção dos números inteiros simples do tipo $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4}$, etc.. Assim, Pitágoras concluiu que havia uma música que representava as relações numéricas da natureza e que constituía sua harmonia interior.

Entre as descobertas sobre a matemática atribuídas aos pitagóricos podemos citar:

- a classificação dos números em: primos e compostos, pares e ímpares, amigos, perfeitos e figurados;
- o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum;
- que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos;
- se um polígono tem n lados, então a soma dos ângulos internos do polígono é igual a (2n - 4) ângulos retos.

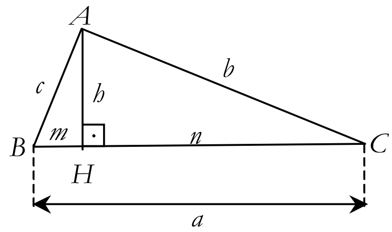
Eles também desenvolveram métodos geométricos para demonstrar diversas identidades algébricas e estudaram os sólidos regulares como o tetraedro, o cubo e o dodecaedro.

O símbolo que representava os pitagóricos era o pentagrama ou pentágono estrelado, isto devido às propriedades desta figura, pois ao desenharmos um pentágono regular e traçarmos as suas diagonais, veremos que elas se cruzam e formam um novo pentágono interior ao anterior. "A interseção de duas diagonais divide a diagonal de uma forma especial chamada pelos gregos de divisão em média e extrema razão e que conhecemos também como secção áurea."

(Texto de: Valéria Ostete Jannis Luchetta; supervisão e orientação: prof. Doutor Francisco César Polcino Milies)

RELAÇÕES MÉTRICAS NUM TRIÂNGULO RETÂNGULO

Considere o triângulo *ABC*, retângulo em Â, da figura. Vamos definir alguns elementos.



$\overline{BC} = a \Rightarrow$ hipotenusa

$\left\{\begin{array}{l}\overline{AB}\\ \overline{AC}\end{array}\right. \Rightarrow$ catetos

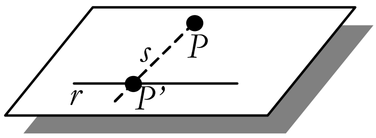
$\overline{AH} \Rightarrow$ altura

$\overline{BH} \Rightarrow$ projeção do cateto c sobre a hipotenusa

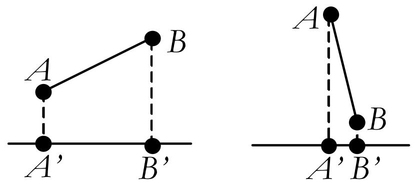
$\overline{CD} \Rightarrow$ projeção do cateto *b* sobre a hipotenusa

PROJEÇÃO ORTOGONAL:

Considere um ponto *P* e duas retas *r* e *s*, sendo *s* perpendicular a *r* e passando por *P*, em um mesmo plano. Chama-se projeção ortogonal do ponto *P* sobre a reta *r* a intersecção de *r* e *s*. Na figura *P'* é projeção de *P*.



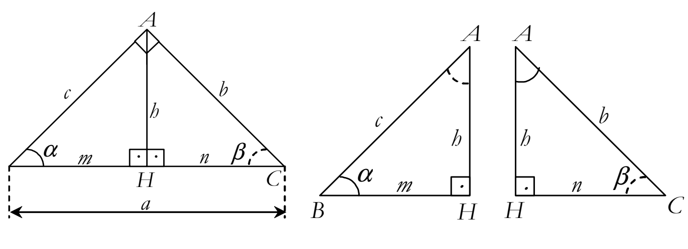
Projeção ortogonal de um segmento de reta é o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos desse segmento. Na figura $\overline{A'B'}$ é projeção de $\overline{AB}$.



SEMELHANÇA:

Num triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa determina dois triângulos retângulos semelhantes entre si e ao primeiro. Veja a figura, onde $\overline{AH}$ é altura, logo pelo enunciado anterior termos:

$$\Delta ABC \approx \Delta HBA \approx \Delta HAC$$



RELAÇÕES MÉTRICAS:

Com base nas semelhanças dos triângulos citados acima, podemos concluir que:

1) a medida de cada cateto é a média geométrica entre as medidas da hipotenusa e da projeção do respectivo cateto sobre ela.

$$b^2 = a \cdot n \text{ e } c^2 = a \cdot m$$

Como $\Delta ABC \approx \Delta HAC$ temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = a \cdot n$$

Semelhantemente, obtemos a relação:

$$c^2 = a \cdot m$$

2) A medida da altura relativa à hipotenusa é a média geométrica entre as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

$$h^2 = m \cdot n$$

Como $\Delta HBA \approx \Delta HAC$ temos:

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

3) O produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa a ela.

$$b \cdot c = a \cdot h$$

Como $\Delta ABC \approx \Delta HBA$ temos:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow b \cdot c = a \cdot h$$

TEOREMA DE PITÁGORAS

O quadrado da medida da hipotenusa é igual á soma dos quadrados das medidas dos catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Demonstração: sabendo que $b^2 = a \cdot n$ e $c^2 = a \cdot m$, somando membro a membro as duas equações, obtemos:

$$b^2 + c^2 = an + am \Rightarrow b^2 + c^2 = a(m+n)$$

Como $m + n = a$, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

CURIOSIDADE:

"O *Teorema de Pitágoras* (de larga aplicação na prática) foi o único teorema da Geometria que recebeu a flecha do sarcasmo e da ironia".

Já na Antiguidade os *anti-pitagóricos,* impelidos pela inveja, procuravam lançar o ridículo sobre os discípulos do grande geômetra e, sempre que era possível, focalizavam de forma gaiata o seu teorema, em relação ao qual apresentavam anedotas e caricaturas por vezes injuriosas.

Sabemos que o Teorema de Pitágoras não é válido somente para o quadrado, mas também para três polígonos semelhantes cujos lados homólogos *a, b* e *c,* sejam de um triângulo retângulo:

A área do maior polígono (lado a) será igual à soma das áreas dos outros dois polígonos semelhantes cujos lados homólogos são respectivamente b e c.

Será muito fácil provar, por exemplo, que o triângulo equilátero construído sobre a hipotenusa é equivalente à soma dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos.

De idêntico modo teríamos: o hexágono regular construído sobre a hipotenusa é equivalente a soma dos hexágonos regulares construídos sobre os catetos.

Em relação ao círculo poderíamos formular princípio análogo: o círculo, que tem por diâmetro a hipotenusa, é equivalente à soma dos círculos que têm por diâmetro, respectivamente, os catetos.

(Texto extraído do livro "As Maravilhas da Matemática " de Malba Tahan, Editora Bloch)

EXERCÍCIOS

1. Um quadrado tem um lado de medida *a.* A medida *d* de uma de suas diagonais, em função de *a* é:

2. Um triângulo equilátero tem um lado de medida *a.* A medida *h* de uma de suas alturas, em função de *a* é:

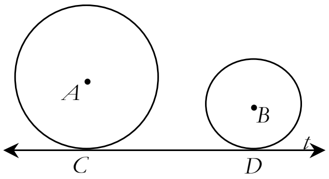
3. Dar todos os triplos pitagóricos de triângulos semelhantes ao triângulo pitagórico 5, 12, 13, nos quais nenhum lado tenha medida superior a 60.

4. (FUVEST) Uma escada de *25dm* de comprimento se apoia em um muro do qual seu pé dista *7dm.* Se o pé da escada se afastar mais *8dm* do muro, qual será o deslocamento verificado pela extremidade superior da escada?

5. (FUVEST) Qual é a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles cujo perímetro é igual a 2?

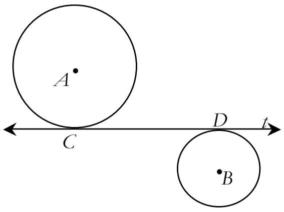
6. Considerar um triângulo equilátero de lado *12cm,* a altura $\overline{AH}$ e o ponto médio *M* dessa altura. Calcular a medida do segmento $\overline{BM}$.

7. Na figura, a reta t é uma tangente exterior às duas circunferências de centros A e B e raios *17 cm* e *7 cm,* respectivamente. Sendo *26 cm* a medida de $\overline{AB}$, calcular a distância entre os pontos de tangência C e D.

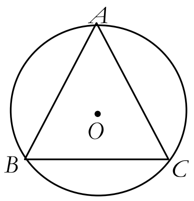


8. Na figura, as circunferências de centros A e B tem raios medindo 3 *cm* e 2 *cm,* respectivamente, e a distância AB entre os centros é *13 cm.* A reta t é tangente às circunferências nos pontos C e D . A medida do segmento $\overline{CD}$, em *cm,* é igual a:

a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

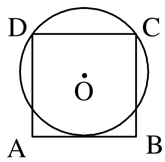


9. Um triângulo ABC isósceles de base $BC = 12$ esta inscrito numa circunferência de centro O e diâmetro *13cm*, conforme a figura. Calcular a medida da altura relativa a $\overline{BC}$.



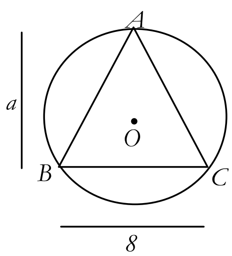
10. (CESCEM) A figura mostra uma circunferência de centro O que passa pelos pontos C e D e tangencia o lado $\overline{AB}$ de um quadrado $ABCD$. Se um lado desse quadrado mede *8cm,* então o raio dessa circunferência mede:

a) $4\sqrt{2}cm$
b) *5 cm*
c) $5\sqrt{2}cm$
d) *6 cm*
e) $6\sqrt{2}cm$



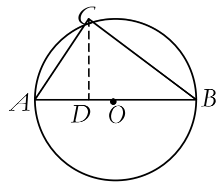
11. Um triângulo isósceles ABC $(AB = AC)$ está inscrito numa circunferência de centro $O,$ conforme a figura. Sendo a medida do lado $\overline{BC}$ igual a medida da altura relativa ao vértice A, podemos afirmar que o raio dessa circunferência é igual a:

a) 4
b) 5
c) $4\sqrt{2}$
d) $5\sqrt{2}$
e) $\sqrt{6}$



12. 87) Na figura, $\overline{BD}$ é a projeção ortogonal da corda $\overline{BC}$ sobre o diâmetro $\overline{AB}$ da circunferência de centro O. Se $AC = 6$ *cm* e $BD = 9$ *cm,* então o diâmetro dessa circunferência, em *cm,* mede:

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 15



13. Uma altura de um triângulo equilátero é congruente a um lado de um quadrado cuja medida de uma diagonal é $4\sqrt{6}cm$. Calcular o perímetro desse triângulo.

14. (FUVEST) Um triângulo retângulo tem catetos $\overline{AB} = 3$ e $\overline{AC} = 4$. No cateto $\overline{AB}$, toma-se um ponto P equidistante do ponto A e da reta BC. Qual a distância AP?

5. POLÍGONOS

INTRODUÇÃO

A História da Ciência e, em particular, a *História da Matemática*, constitui um dos capítulos mais interessantes do conhecimento. Permite compreender a origem das ideias que deram forma à nossa cultura e observar também os aspectos humanos do seu desenvolvimento: enxergar os homens que criaram essas ideias e estudar as circunstâncias em que elas se desenvolveram.

Assim, esta história é um valioso instrumento para o ensino/aprendizado da própria matemática. Podemos entender porque cada conceito foi introduzido nesta ciência e porque, no fundo, ele sempre era algo natural no seu momento. Permite também estabelecer conexões com a história, a filosofia, a geografia e várias outras manifestações da cultura.

(www.matematica.br)

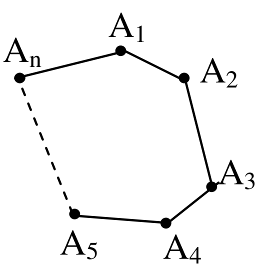
DEFINIÇÃO DOS POLÍGONOS

Tomemos num plano, um conjunto de **n** pontos ($n \geq 3$) A_1, $A_2, ..., A_n$, ordenados de modo que três pontos consecutivos não sejam colineares.

Chamamos de polígono A_1, $A_2, ..., A_n$, à figura formada pela união dos **n** segmentos de reta consecutivos.

$$\overline{A_1A_2} \cup \overline{A_2A_3} \cup \overline{A_3A_4} \cup ... \cup \overline{A_nA_1}$$

É importante observarmos o fato de um polígono de **n** lados ter **n** vértices, **n** ângulos internos e **n** ângulos externos!



NOMENCLATURA

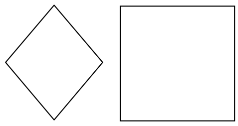
Nomeamos os polígonos de acordo com o número de lados, como nos exemplos abaixo:

triângulo	3 lados
quadrilátero	4 lados
pentágono	5 lados
hexágono	6 lados
heptágono	7 lados
octógono	8 lados
eneágono	9 lados
decágono	10 lados
undecágono	11 lados
dodecágono	12 lados
pentadecágono	15 lados
icoságono	20 lados

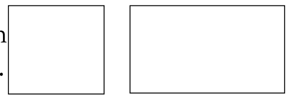
CLASSIFICAÇÃO DOS POLÍGONOS

Podemos classificar os polígonos quanto aos lados e quanto aos ângulos. Vejamos:

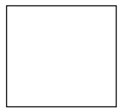
Polígono equilátero é aquele que tem todos os lados congruentes.



Polígono equiângulo é aquele que tem todos os ângulos internos congruentes.

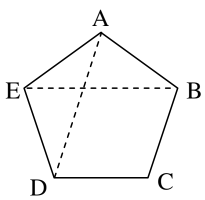


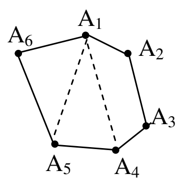
Polígono regular é aquele que é equilátero e equiângulo, simultaneamente.



NÚMERO DE DIAGONAIS

Diagonal é um segmento em que as extremidades são vértices não consecutivos de um polígono. Veja a figura abaixo.



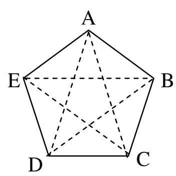


O número de diagonais de um polígono pode ser determinado através da expressão:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Exemplo:

O polígono convexo da figura tem 5 lados. Cada vértice dá origem a 5-3 diagonais. Sendo assim, o número de diagonais do pentágono pode ser determinado da seguinte maneira:



$$d = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow d = \frac{5 \cdot (5-3)}{2} = 5$$

Demonstração Intuitiva

Num polígono de **n** lados:

cada vértice dá origem a $(n-3)$ diagonais;

os **n** vértices dão origem a $n(n-3)$ diagonais;

com este raciocínio, cada diagonal foi contada duas vezes, pois cada uma delas é determinada por dois vértices;

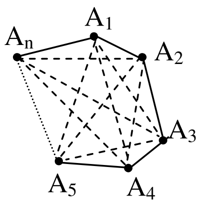
deste modo, sendo **d** o número de diagonais do polígono de **n** lados, temos:

$$d=\frac{n(n-3)}{2}$$

Demonstração Formal

<u>Hipótese:</u> $\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},...,\overline{A_nA_1}$ é um polígono de **n** lados, $n\geq 3$ e **d** é o numero de suas diagonais.

<u>Tese:</u> $d=\dfrac{n(n-3)}{2}$



1º passo: considere **n** o número de vértices do polígono, de acordo com a hipótese.
2º passo: fixando uma extremidade em A_1 e ligando-a às demais extremidades nos pontos A_3, A_4 ,.., A_{n-1} (não consecutivas), encontramos $n-3$ diagonais.
3º passo: repetindo-se essa operação para os vértices A_2, A_3 ,.., A_n , resulta um total de $n(n-3)$ diagonais.
4º passo: entretanto, esse total representa o dobro do número de diagonais (por exemplo, os segmentos $\overline{A_1A_3}$ e $\overline{A_3A_1}$ representam a mesma diagonal.). Logo, indicando-se por **d** o número de diagonais, tem-se:

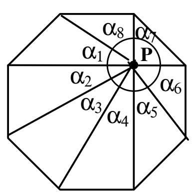
$$2d=n(n-3)\Rightarrow d=\frac{n(n-3)}{2}$$

SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS

A soma dos ângulos internos de um polígono pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$S_i=(n-2)\cdot 180^\circ$$

Exemplo: a soma dos ângulos internos do polígono da figura é:



- $S_i=(n-2)\cdot 180^\circ$
- $S_i=(8-2)\cdot 180^\circ$
- $S_i=1080^\circ$

Demonstração

1º passo: dado um polígono de **n** lados**,** seja **P** um ponto interno desse polígono (veja o exemplo acima).
2º passo: unindo-se o ponto **P** aos vértices do polígono, formamos **n** triângulos, onde a soma dos ângulos internos de todos os **n** triângulos pode ser expressa por $180^\circ\cdot n$.
3º passo: seja a soma dos ângulos $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ igual a 360º.
4º passo: sendo S_i a soma dos ângulos internos do polígono, temos:

$$S_i=180^\circ\cdot n-360^\circ$$
$$\therefore S_i=(n-2)\cdot 180^\circ$$

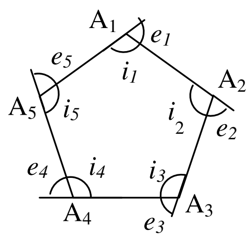
SOMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS

A soma dos ângulos externos de um polígono é dada pela seguinte expressão:

$$S_e=360^\circ$$

Exemplo: considere s_i+s_e , a soma dos ângulos internos i_n e externos e_n do polígono, respectivamente.

No pentágono convexo da figura seguinte, tem-se:



$$i_1+e_1=180^\circ$$
$$i_2+e_2=180^\circ$$
$$i_3+e_3=180^\circ$$
$$i_4+e_4=180^\circ$$
$$i_5+e_5=180^\circ$$

Logo,

$$i_1+e_1=i_2+e_2=i_3+e_3=i_4+e_4=i_5+e_5=180^\circ$$

Assim sendo, $S_i+S_e=180^\circ\cdot 5\Leftrightarrow S_e=900^\circ-S_i$
Como, $S_i=(n-2)\cdot 180^\circ$, temos:

$$S_e=900^\circ-(5-2)\cdot 180^\circ\Leftrightarrow$$
$$S_e=360^\circ$$

Demonstração

1º passo: num polígono de **n** lados, sejam i as medidas de um ângulo interno e e as medidas do ângulo externo adjacente a ele.
2º passo: como $i+e=180^\circ$ (observar o exemplo acima), para todos os vértices do polígono, podemos escrever:

$$\begin{cases} i_1+e_1=180^\circ \\ i_2+e_2=180^\circ \\ \vdots \qquad \vdots \\ i_n+e_n=180^\circ \end{cases}$$

3º passo: considere s_i+s_e, a soma dos ângulos internos e externos do polígono, respectivamente. Agrupando membro a membro e somando n vezes as igualdades acima, obtemos:

$$S_i + S_e = 180^o \cdot n \Rightarrow S_e = 180^o \cdot n - S_i$$

Como $S_i = (n-2)\cdot 180$, temos:

$$S_e = 180^o \cdot n - [(n-2)\cdot 180^o]$$
$$S_e = 180^o \cdot n - [180^o \cdot n - 2\cdot 180^o]$$
$$S_e = 180^o \cdot n - 180^o \cdot n + 360^o$$
$$S_e = 360^o$$

CURIOSIDADE

A PEDRA DA ROSETA

Devido o acordo feito no **tratado de capitulação** em 1799, quando a França foi derrotada pela Inglaterra, a *pedra de Roseta* encontra-se no Museu Britânico. Essa pedra foi gravada em 196 a.C., medindo três pés e sete polegadas (109,22 cm) por dois pés e seis polegadas (76,2 cm).

A pedra contém um decreto escrito em caracteres hieróglifos, em demóticos e em grego. Quem a decifrou foi o francês Jean François Chapollion (1790-1832), tomando como base o texto grego. A partir deste feito, foi possível decifrar os caracteres hieroglíficos e demóticos. (www.matematica.br)

EXERCÍCIOS

1. Calcule o número de diagonais de um eneágono convexo.

2. Qual o polígono convexo cujo número de diagonais é o dobro do número de lados?

3. (UFSCar) Um polígono regular com exatamente 35 diagonais tem:
a) 6 lados
b) 9 lados
c) 10 lados
d) 12 lados
e) 20 lados

4. (FEI) A sequência a seguir representa o número de diagonais d de um polígono convexo de n lados.

n	3	4	5	6	7	…	13
d	0	2	5	9	14	…	x

O valor de x é:
a) 44
b) 60
c) 65
d) 77
e) 91

5. (FEI) A soma das medidas dos ângulos internos de um pentágono convexo é, em radianos:
a) 2π
b) 3π
c) 4π
d) 5π
e) 6π

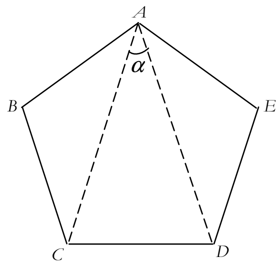
6. (PUC) Cada ângulo interno de um decágono regular mede:
a) 36º
b) 60º
c) 72º
d) 120º
e) 144º

7. (USF) O polígono regular cujo ângulo interno mede o triplo do ângulo externo é o:
a) pentágono
b) hexágono
c) octógono
d) decágono
e) dodecágono

8. (IME) A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é 1080^0. Calcule o número de diagonais desse polígono.

9. (MACKENZIE-SP) Os ângulos externos de um polígono regular medem 20^0. Então, o número de diagonais desse polígono é:
a) 90
b) 104
c) 119
d) 135
e) 132

10. (FUVEST) Na figura adiante, ABCDE é um pentágono regular. A medida, em graus, do ângulo α é:



a) 32º
b) 34º
c) 36º
d) 38º
e) 40º

11. (MACKENZIE) Os lados de um polígono regular de n lados ($n > 4$), são prolongados para formar uma estrela. O número de graus em cada vértice da estrela é:
a) $\frac{360°}{n}$
b) $\frac{(n-4)\cdot 180°}{n}$
c) $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$
d) $180° - \frac{90°}{n}$
e) $\frac{180°}{n}$

12. (PUC-SP) As mediatrizes de dois lados consecutivos de um polígono regular formam um ângulo igual a 20^0. Esse polígono é:
a) um octógono regular.
b) um eneágono regular.
c) um pentadecágono regular.
d) um icoságono regular.
e) um octadecágono regular.

13. (FEI) São dados dois polígonos regulares. O segundo tem 4 lados a mais que o primeiro e o ângulo central do primeiro excede a medida do ângulo central do segundo em 45^0. O número de lados do primeiro polígono é:
a) 4
b) 6
c) 8
d) 10
e) 12

14. (CONSART) Se cada ângulo interno de um polígono não excede $\frac{3\pi}{4}$, então o polígono tem, no máximo:
a) 4 lados
b) 5 lados
c) 6 lados
d) 8 lados
e) 12 lados

15. (FUVEST) Considerando um polígono regular de n lados ($n \geq 4$) e, tomando-se ao acaso, uma das diagonais do polígono, a probabilidade de que ela passe pelo centro é:
a) 0 se n é par.
b) $\frac{1}{2}$ se n é ímpar.
c) 1 se n é par.
d) $\frac{1}{n}$ se n é ímpar.
e) $\frac{1}{n-3}$ se n é par.

6. QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

CONTEXTO HISTÓRICO

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA GREGA

A história da civilização grega tem suas origens nas invasões de povos bárbaros (dórios, aqueus, jônicos e eólios), na península balcânica por volta do segundo milênio a.C.. Estes povos foram conquistando as civilizações ali estabelecidas e avançando em direção à ilha de Creta.

O período histórico da civilização grega teria início, por volta de 800 a.C.. Nesta altura, os Gregos mudaram do sistema de escrita hieroglífica para o alfabeto fenício, o que lhes permitiu transmitir sua literatura por escrito, utilizando o papiro.

Com o desenvolvimento da civilização grega, as relações comerciais também cresceram. Consequentemente, com o aumento dessas relações comerciais, a Grécia tornou-se mais atrativa às invasões. O povo passou a se reunir em torno de fortificações, formando assim, a **principal unidade política** da Grécia Antiga: **a cidade-estado** ou **polis** (Atenas, Esparta, Tebas, Corinto, Argos, ...).

Os Gregos espalharam-se por vários pontos do litoral dos Mares Egeu e Negro, chegando a atingir a Bacia do Mediterrâneo. Fundaram diversas cidades como Cretona, Elea e Siracusa (cidades da Magna Grécia, no sul da Itália) ou como Mileto e Samos na Ásia Menor.

O grande florescimento da cultura grega surgiu na colônia situada na Ásia Menor, principalmente na cidade de Mileto. No início do século VI a.C., os filósofos de Mileto, entre eles Tales (625 a.C.-547 a.C.), começaram a tentar compreender os fenômenos da natureza sem recorrer a mitos e à religião. A utilização do raciocínio dedutivo deu origem à criação de uma matemática dedutiva e formalmente organizada, bem diferente da matemática de caráter eminentemente prático, desenvolvida no Egito e na Mesopotânia, com quem, certamente, tinham contatos comerciais.

No final do século IV a.C., o centro do conhecimento e das Matemáticas Gregas mudou-se de Mileto e de outras cidades na Ásia Menor para a Magna Grécia, onde viveu Pitágoras (569 a.C-475 a.C.). Já, por volta de meados do século V a.C., o centro mudou-se de novo e, desta vez, para Atenas, onde a matemática e a filosofia se desenvolveram principalmente na Academia de Platão (427 - 347 a.C.).

O maior desenvolvimento da matemática grega deu-se no período helênico, de 300 a.C. a 200 d.C.. No início deste período, o centro da matemática mudou-se de Atenas para a cidade construída por Alexandre, o Grande (358 - 323 a.C.) - Alexandria (no Egito), onde foi construído um Museu. Lá trabalharam grandes matemáticos, como Euclides (c. 325 - c. 265 a.C.).

Alexandria permaneceu o centro das matemáticas durante cerca de um milênio, mas infelizmente a maior parte dos textos matemáticos gregos não chegaram aos nossos dias na sua versão original, pois eram escritos em papiros muito frágeis e que com a utilização estragavam-se. Assim, apenas os trabalhos considerados importantes, como por exemplo, o livro "Os Elementos" de Euclides, é que foram copiados frequentemente e conseguiram resistir através do tempo.

QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Alguns quadriláteros que possuem propriedades particulares são chamados de **quadriláteros notáveis** e um estudo detalhado deles é essencial para possamos entendê-los.

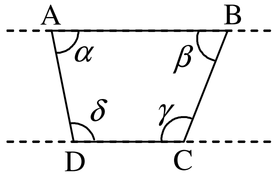
São eles, o **trapézio**, o **paralelogramo**, o **retângulo**, o **losango** e o **quadrado**. Vejamos cada um:

TRAPÉZIO

Trapézio é todo quadrilátero que possui **dois lados paralelos.**

Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ ($AB//CD$) da figura abaixo, são as **bases** do trapézio. Os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são chamados **lados transversais**, ou transversos.

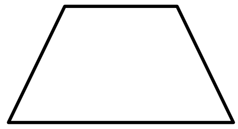
Em todo trapézio, ângulos adjacentes a um mesmo lado transversal, são **ângulos suplementares**.



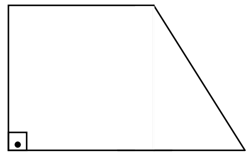
No trapézio da figura, temos:

$$\alpha + \delta = 180^o \quad e \quad \gamma + \beta = 180^o$$

Trapézio isósceles é aquele que possui os **lados transversais congruentes**.



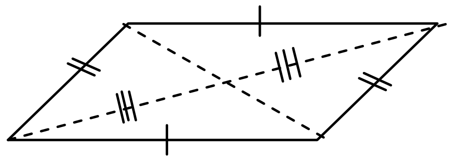
Trapézio retângulo é aquele que possui um ângulo reto.



PARALELOGRAMO

Paralelogramo é todo quadrilátero que possui **os lados opostos paralelos**. Neles, valem as seguintes propriedades:

os lados opostos são congruentes;
os ângulos opostos são congruentes;
as diagonais se cortam em seus respectivos pontos médios.



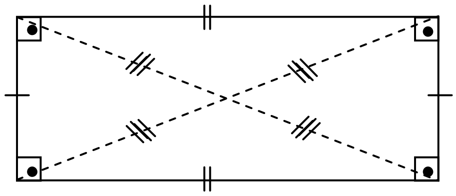
Lembrete: todo paralelogramo é um trapézio, pois tem dois lados paralelos.

RETÂNGULO

Retângulo é todo paralelogramo que possui **um ângulo reto.**

Nos retângulos, além das propriedades dos paralelogramos, valem as seguintes propriedades:

as diagonais são congruentes.
os quatro ângulos são retos.



Lembrete: todo retângulo é um paralelogramo e, portanto, também é um trapézio.

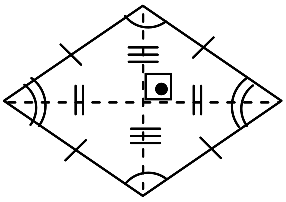
LOSANGO

Losango é todo paralelogramo que possui **dois lados adjacentes congruentes**. Neles, além das propriedades dos paralelogramos, valem as seguintes propriedades:

as diagonais estão nas bissetrizes dos ângulos internos;

as diagonais são perpendiculares;

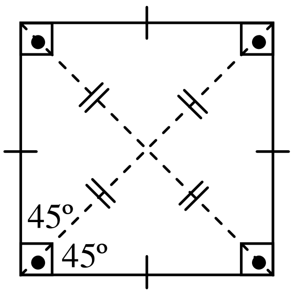
os quatro lados são congruentes.



Lembrete: todo losango é um paralelogramo e, portanto, também é um trapézio.

QUADRADO

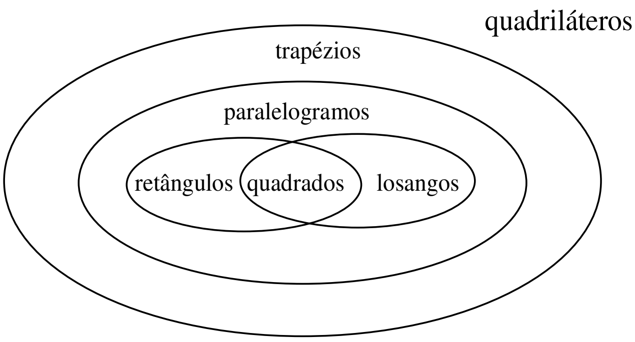
Quadrado é todo quadrilátero que é **retângulo** e **losango,** simultaneamente. Nele, valem todas as propriedades dos retângulos e dos losangos.



Lembrete: todo quadrado é retângulo e losango e, portanto, também é paralelogramo e trapézio.

RELAÇÃO ENTRE OS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Observando as relações entre os **quadriláteros notáveis** e os agrupando em conjuntos de acordo com suas propriedades, podemos montar o seguinte diagrama:

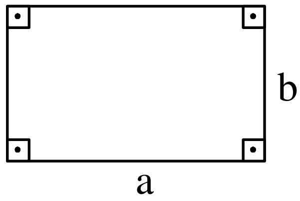


ÁREA DOS QUADRILÁTEROS

Área de uma figura é um número associado à sua **superfície.** Ela exprime a relação existente entre sua superfície e a superfície de um quadrado de lado unitário (medindo uma unidade). Dizemos que duas figuras são **equivalentes** quando elas possuem a **mesma área**.

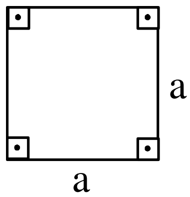
ÁREA DO RETÂNGULO

A área S de um retângulo é o produto das medidas **a** e **b** de dois de seus lados consecutivos.



- $S = a \cdot b$

ÁREA DO QUADRADO



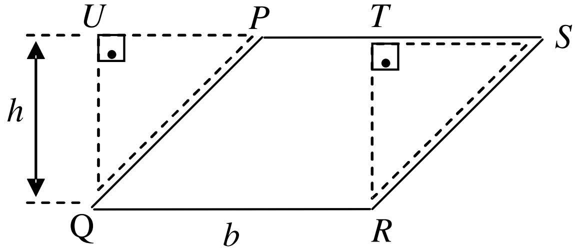
Como o quadrado é um caso particular de retângulo, onde a base é igual à altura, a sua área **S** é dada por:

$$S = a \cdot a$$
$$S = a^2$$

ÁREA DO PARALELOGRAMO

Os triângulos RST e QPU, são congruentes pelo critério Lado-Ângulo-Ângulo e, portanto, são **equivalentes**, ou seja, **têm a mesma área**.

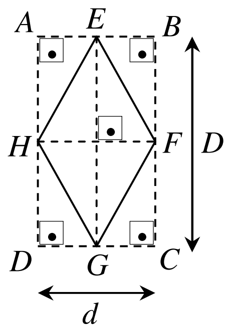
Portanto, o paralelogramo $PQRS$ e o retângulo $UQRT$, ambos de base b e altura h possuem a mesma área S.



$$S = b \cdot h$$

ÁREA DO LOSANGO

O retângulo $ABCD$ está dividido em oito triângulos retângulos congruentes. O losango $EFGH$ cujas diagonais medem D, ou seja $\overline{EG}$, e d, que corresponde ao segmento $\overline{HF}$ da figura, é composto por quatro desses triângulos. Portanto, a área **S** do losango é a metade da área do retângulo, como mostra a figura.



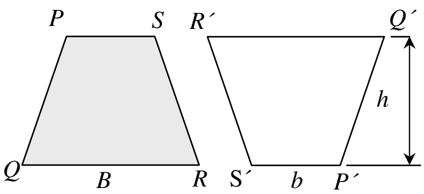
Assim:

$$S = \frac{D \cdot d}{2}$$

ÁREA DO TRAPÉZIO

O trapézio $PQRS$, de bases **B** e **b** e altura **h,** é **equivalente** ao trapézio $P'Q'R'S'$.

A união dos dois trapézios é o paralelogramo $PQP'Q'$, cuja base mede B+b e a altura mede **h**.



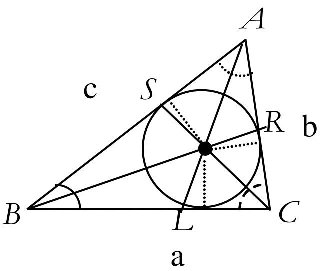
Portanto, a área **S** do trapézio $PQRS$ é metade da área do paralelogramo.

$$S = \frac{(B+b)}{2}h$$

POLÍGONO CIRCUNSCRITO

A área **S** de um polígono circunscrito a uma circunferência de raio **r** é dada por:

$$S = p \cdot r$$



onde, **p** é o semiperímetro do polígono**.**

DEMONSTRAÇÃO

$$S = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC} + S_{\Delta AOB}$$

$$S = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2}$$

$$S = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$$

De fato, como $p = \frac{a+b+c}{2}$**,** temos:

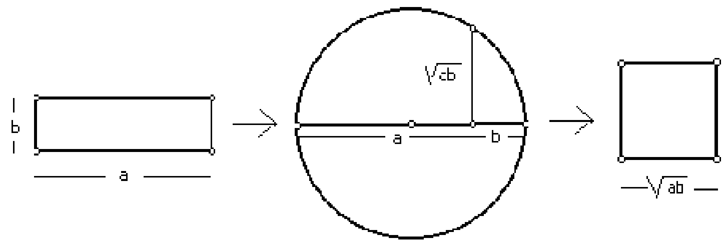
$$S = p \cdot r$$

Observação: se o polígono for regular, então o raio da circunferência inscrita recebe o nome de apótema, como veremos no próximo tópico.

CURIOSIDADE

TRANSFORMAÇÃO DE RETÂNGULO EM QUADRADO

Para transformar um quadrado num retângulo **equivalente**, ou seja, **de mesma área,** procedemos da seguinte maneira:
1º passo: com régua e compasso, alinhamos dois segmentos de comprimentos **a** e **b**, iguais à base e à altura do retângulo, respectivamente.
2º passo: em seguida, traçamos o círculo com centro no ponto médio dos segmentos **a** e **b**.
3º passo: na extremidade comum aos dois segmentos, traçamos um segmento perpendicular ao diâmetro, com extremidade na circunferência.
4º passo: este segmento tem como medida, a raiz quadrada de $a \cdot b$ (porquê?), que é a medida do lado do quadrado desejado.



EXERCÍCIOS

1. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das seguintes sentenças:
a) (   ) Todo retângulo é trapézio.
b) (   ) Nem todo quadrado é retângulo.
c) (   ) Todo paralelogramo é retângulo.
d) (   ) Todo losango é paralelogramo.
e) (   ) Nem todo trapézio é paralelogramo.

2. (CESGRANRIO) Em um trapézio retângulo, o menor ângulo mede 35^0. O maior ângulo desse polígono mede:
a) 155º
b) 150º
c) 145º
d) 142º
e) 140º

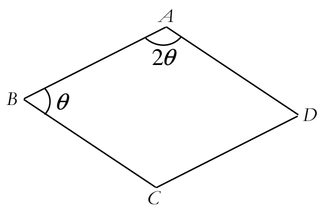
3. (UNESP) A afirmação falsa é:
a) Todo quadrado é um losango.
b) Existem retângulos que não são losangos.
c) Todo paralelogramo é um quadrilátero.
d) Todo quadrado é um retângulo.
e) Um losango pode não ser paralelogramo.

4. (UNESP) Considere as seguintes proposições:
- todo quadrado é losango.
- todo quadrado é um retângulo.
- todo retângulo é um paralelogramo.
- todo triangulo equilátero é isósceles.

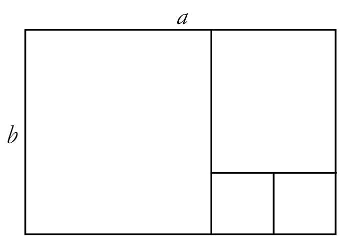
Pode-se afirmar que:
a) só uma é verdadeira.
b) todas são verdadeiras.
c) só uma é falsa.
d) duas são verdadeiras e duas são falsas.
e) todas são falsas.

5. (PUCCAMP) Na figura a seguir, tem-se representado o losango $ABCD$, cuja diagonal menor mede 4cm.

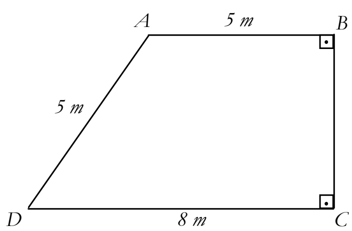
A medida do lado desse losango, em centímetros, é:
a) $6\sqrt{3}$
b) 6
c) $4\sqrt{3}$
d) 4
e) $2\sqrt{3}$



6. (FUVEST) O retângulo a seguir de dimensões a e b está decomposto em quadrados. Qual o valor da razão a/b?
a) 5/3
b) 2/3
c) 2
d) 3/2
e) 1/2

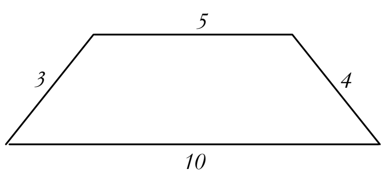


7. (FAAP-SP) Uma escola de educação artística tem seus canteiros de forma geométrica. Um deles é o trapézio retângulo com as medidas indicadas na figura. A área do canteiro representado pela figura é:
a) 26 m^2
b) 13 m^2
c) 6,5 m^2
d) 52 m^2
e) 22 m^2



8. (PUCCAMP) Considere o trapézio representado na figura abaixo, cujas medidas dos lados são dadas em centímetros.

A área do trapézio, em centímetros quadrados, é:a) 18
b) 24
c) 30
d) 32
e) 36

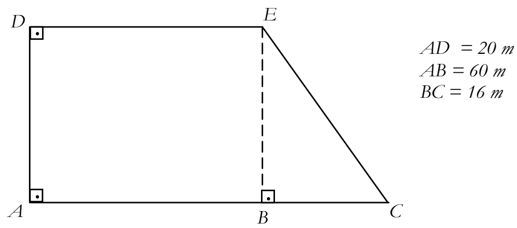


9. (UMESP) Um trapézio retângulo tem base maior 15cm, base menor 9cm e altura 8cm. A medida do lado não perpendicular às bases e a área do trapézio, valem, respectivamente:
a) 17cm e 192cm²
b) 10cm e 96cm²
c) 10cm e 192cm²
d) $\sqrt{10}$ cm e 96cm²
e) 17cm e 96cm²

10. (UNICAMP) Um fio de 48cm de comprimento é cortado em duas partes, para formar dois quadrados, de modo que a área de um deles seja quatro vezes a área do outro.
a) Qual deve ser o comprimento de cada uma das partes do fio?

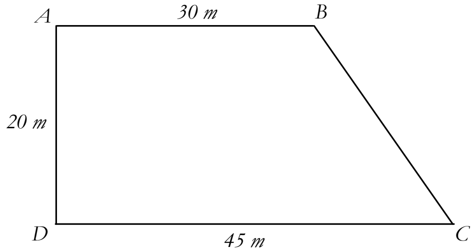
b) Qual será a área de cada um dos quadrados formados?

11. (FUVEST) Dois irmãos herdaram um terreno com a forma da figura. Para dividir o terreno em duas partes de mesma área, eles usaram uma reta perpendicular a $\overline{AB}$. Para que a divisão tenha sido feita corretamente, a distância dessa reta ao ponto A, em metros, deverá ter sido:
a) 31
b) 32
c) 33
d) 34
e) 35



12. (UNISINOS) Um homem deixou como herança para seus dois filhos um terreno que tem forma de um trapézio retângulo (conforme figura abaixo). Para que a parte de cada um tivesse a mesma área, os dois filhos resolveram dividir o terreno, traçando uma paralela ao lado $\overline{AD}$. A que distância do ponto D, em metros, deve ser traçada esta paralela?

a) 15,80
b) 18,75
c) 20,84
d) 23,15
e) 26,03



13. (FUVEST) Aumentando-se os lados a e b de um retângulo de 15% e 20% respectivamente, a área do retângulo é aumentada em:

a) 35%
b) 30%
c) 3,5%
d) 3,8%
e) 38%

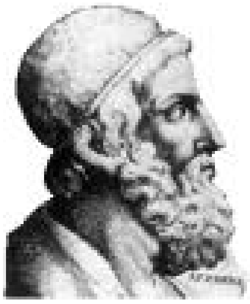
14. (FUVEST) Os lados de um retângulo de área 12m² estão na razão de 1:3. Qual o perímetro do retângulo?

a) 8 m
b) 12 m
c) 16 m
d) 20 m
e) 24 m

7. POLÍGONOS REGULARES

CONTEXTO HISTÓRICO

Arquimedes: Um dos maiores matemáticos da Grécia no século III a.C!



Arquimedes nasceu na cidade de Siracusa, localizada na ilha da Sicília. Não se sabe ao certo a data de seu nascimento, mas se calcula que ele nasceu aproximadamente no ano de 287 a.C. Morreu durante a Segunda Guerra Púnica, em Siracusa, no ano de 212 a.C.

Arquimedes pode ter estudado por algum tempo em Alexandria, com os alunos de Euclides, mantendo comunicação com os matemáticos de lá, como Cônon, Dosite e Eratóstenes.

Diz a lenda, que Siracusa resistiu ao sítio de Roma por quase três anos, devido às engenhosas máquinas de guerra inventadas por Arquimedes para deixar seus inimigos à distância. Entre elas: catapultas para lançar pedras; cordas, polias e ganchos para levantar e espatifar os navios romanos; invenções para queimar os navios.

Os trabalhos de Arquimedes exibem grande originalidade, habilidade de cálculos e rigor nas demonstrações. Há cerca de dez tratados que foram preservados até hoje e há vestígio de outros.

Os tratados sobre geometria plana são: a medida de um **Círculo,** onde Arquimedes inaugurou o método clássico para o cálculo de π ; a **quadratura da parábola,** constituído de vinte e quatro proposições, onde mostra que a área de um segmento parabólico é quatro terços da área do triângulo inscrito de mesma base e de vértice no ponto onde a tangente é paralela à base. Esta dedução envolve a soma de uma série geométrica convergente; sobre as **Espirais**, composto por vinte e oito proposições, onde são dedicadas as propriedades da curva (conhecida hoje como espiral de Arquimedes), e cuja equação polar é $r = k\theta$, em particular, encontra-se a área compreendida pela curva e por dois raios vetores, de maneira essencialmente igual ao que seria hoje um exercício de cálculo integral.

Através dos árabes, sabemos que a fórmula usual para a área de um triângulo em termos de seus lados (conhecida como fórmula de Hierão - $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, onde p é o semi-perímetro), era conhecida por Arquimedes vários séculos antes de Hierão ter nascido. Papus menciona em seus trabalhos, o tratado de Arquimedes sobre **alavancas,** Têon cita em seus trabalhos, um teorema de Arquimedes encontrado no tratado sobre a **Teoria dos Espelhos**.

Os tratados sobre geometria espacial são: sobre a **Esfera e o Cilindro,** escrito em dois volumes e constituído de cinquenta e três proposições. Trata, entre outras coisas, do teorema que fornece as áreas de uma esfera e de uma calota esférica. Mostra que a área de uma superfície esférica é exatamente dois terços da área da superfície total do cilindro circular reto circunscrito a ela e que o volume da esfera é exatamente dois terços do volume do mesmo cilindro. O livro II inclui o problema de seccionar uma esfera com um plano de maneira a obter dois segmentos esféricos cujos volumes estejam numa razão dada. Esse problema leva a uma equação cúbica, em que é feita uma discussão relativa às condições sob as quais a cúbica pode ter uma raiz real positiva.

Arquimedes escreveu pequenas obras sobre aritmética, uma delas é *O Contador de Areia*, que trata de uma curiosa questão: como determinar a quantidade de grãos de areia capaz de preencher uma esfera de centro na Terra e raio alcançando o Sol. Nesta obra, encontramos observações relacionadas com astronomia, onde Arquimedes utilizou o "modelo de universo de Aristarco de Samos", que antecipou a teoria heliocêntrica de Copérnico. Arquimedes vai calculando a quantidade de areia necessária para encher um dedal, um estádio, o volume da Terra e assim por diante, até encher todo o universo. Ao mesmo tempo, e paralelamente, vai desenvolvendo um sistema de numeração (que levou à invenção dos logaritmos), capaz de exprimir os valores encontrados neste cálculo. Há também o **Problema do Gado**, que envolve oito incógnitas inteiras, relacionadas por sete equações lineares e sujeitas a duas condições adicionais, a saber, que a soma de certo par de incógnitas é um quadrado perfeito e que a soma de outro par determinado de incógnitas é um número triangular. Sem as condições adicionais, os menores valores das incógnitas são números da ordem de milhões; com essas condições, uma das incógnitas deve ser um número com mais que 206.500 dígitos!

Há dois trabalhos de Arquimedes sobre matemática aplicada: sobre o **Equilíbrio de Figuras Planas** e sobre os **Corpos Flutuantes.** O primeiro deles, consta de dois livros e contém vinte e cinco proposições, em que, mediante um tratamento postulacional, obtêm-se as propriedades elementares dos centróides, os quais se determinam de várias áreas planas, terminando com a do segmento parabólico e a de uma área limitada por uma parábola e duas cordas paralelas. Já, o estudo sobre os **Corpos Flutuantes** é composto por dois livros com noventa proposições e representa a primeira aplicação da matemática à hidrostática. O tratado baseia-se em dois postulados, desenvolvendo primeiro as leis familiares da hidrostática e depois considera alguns problemas muito mais difíceis, concluindo com um estudo notável sobre a posição de repouso e estabilidade de um segmento (reto) de parabolóide de revolução mergulhado num fluido.

O tratado "**O Método",** encontra-se na forma de uma carta endereçada a Eratóstenes, é importante devido às informações que fornece sobre **o método** que Arquimedes usava para descobrir muitos de seus teoremas. Ele o usava de maneira experimental, para descobrir resultados que ele então tratava de colocar em termos rigorosos mediante o método de exaustão.

Atribuem-se dois outros trabalhos perdidos a Arquimedes: sobre o **Calendário** e sobre a **Construção de Esferas**. Neste último, havia a descrição de um planetário construído por ele para mostrar os movimentos do Sol, da Lua e dos cinco planetas conhecidos em seu tempo. Provavelmente, o mecanismo era acionado pela água.

A invenção mecânica de Arquimedes mais conhecida é a bomba de água em parafuso, construída por ele para irrigar campos, drenar charcos e retirar água de porões de navios. O engenho, ainda hoje é utilizado no Egito.

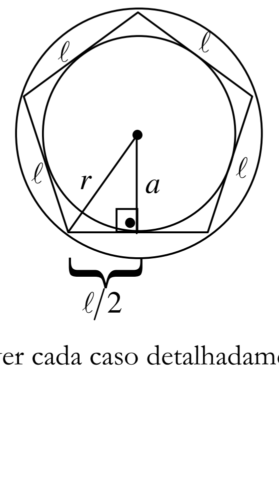
Adaptação do Texto de: Valéria Ostete Jannis Luchetta; supervisão e orientação: prof. Doutor Francisco César Polcino Milies

DEFINIÇÃO

Um polígono é regular quando é equilátero (lados iguais) e equiângulo (ângulos iguais). Nos polígonos regulares, devemos observar e destacar alguns elementos essenciais para entendê-los, tais como, a altura, o apótema (raio da circunferência inscrita), a sua área, a diagonal e o raio da circunferência circunscrita.

No pentágono abaixo:

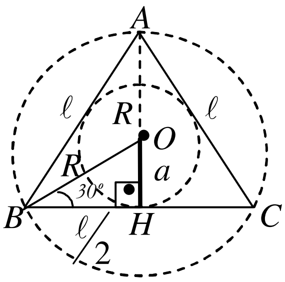
$a =$ Apótema
$r =$ Raio
$\ell =$ Lado



A seguir, vamos ver cada caso detalhadamente.

TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Para calcular a altura, o apótema e o raio da circunferência circunscrita, considere ℓ a medida do lado do triângulo equilátero da figura:



Altura: a altura h do triângulo equilátero ABC pode ser obtida aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo AHB. Dessa forma, temos:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow$$

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Apótema: no triângulo OBH, temos:

$$tg30º = \frac{a}{\frac{\ell}{2}} \Rightarrow$$

$$a = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$$

Raio da circunferência circunscrita: ainda no triângulo OBH, temos:

$$R = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}$$

Observação: num triângulo equilátero, o raio da circunferência circunscrita é o dobro do apótema.

$$R = 2.a$$

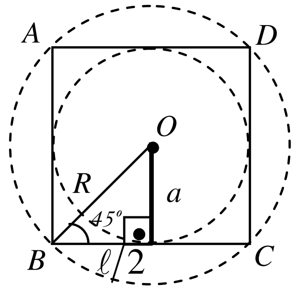
Área: considerando $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, temos:

$$S = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow$$

$$S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

QUADRADO

Considerando ℓ a medida do lado do quadrado da figura, temos:



Diagonal: a diagonal do quadrado é o diâmetro da circunferência circunscrita.

$$d = \ell\sqrt{2}$$

Apótema: no triângulo OBH, temos:

$$tg45º = \frac{a}{\frac{\ell}{2}} \Rightarrow$$

$$a = \frac{\ell}{2}$$

Raio da circunferência circunscrita: ainda no triângulo OBH, temos:

$$\cos 45º = \frac{\frac{\ell}{2}}{R} \Rightarrow$$

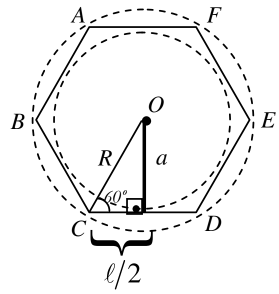
$$R = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$$

Área: como o lado do quadrado tem a mesma medida de sua altura, temos que sua área é dada por:

$$S = \ell^2$$

HEXÁGONO REGULAR

Considerando ℓ a medida do lado do hexágono regular da figura, temos:



Apótema: no hexágono, o <u>apótema é a altura do triângulo equilátero</u> COD. Assim, no triângulo OCH, temos:

$$tg60º = \frac{a}{\frac{\ell}{2}} \Rightarrow \quad a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Raio da circunferência circunscrita: o raio da circunferência circunscrita é o lado do triângulo equilátero AOB.

$$R = \ell$$

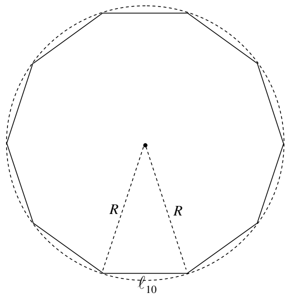
Área: a área do hexágono é a soma das áreas dos 6 triângulos equiláteros de lado ℓ congruentes ao raio da circunferência circunscrita.

$$S = 6S_{\Delta AOB} \Rightarrow S = 6\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

DECÁGONO REGULAR

Demonstra-se, que o lado do decágono regular é o segmento áureo (vide o contexto histórico da página 36, na apostila 1) do raio *R* da circunferência circunscrita a ele.



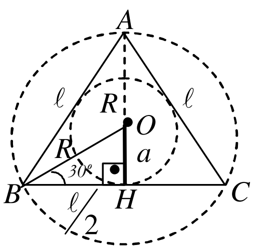
Como a razão áurea equivale a $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, o lado do decágono pode ser calculado da seguinte maneira.

$$\ell_{10} = R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

Sugestão: tente calcular a área de um decágono regular de raio R, mas não pense que isso é fácil!

ÁREA DOS POLÍGONOS REGULARES

A área *S* de um polígono regular de perímetro *2p* e apótema *a* (como foi definido no tópico anterior), pode ser expressa por:



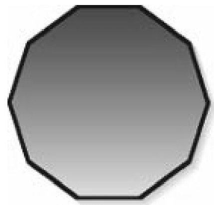
$$S = p \cdot a$$

CURIOSIDADES

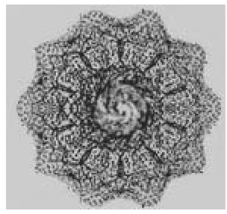
DECÁGONO ESTRELADO

A décima parte da circunferência determina o segmento áureo de seu raio.

Essa relação, entre o raio e o lado do decágono regular inscrito, possivelmente foi o que levou Kepler a considerar esses aspectos, pois, a relação áurea, direta ou indiretamente, está presente nas mais belas formas da Natureza. Por isso, para Kepler, a relação áurea deveria também existir entre pontos do Zodíaco.

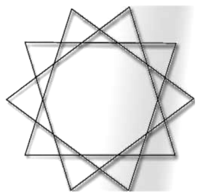


O decágono é uma figura onde cada lado corresponde a um arco de 36 graus. O decágono contém proporções geométricas muito comuns na natureza. Um corte transversal no DNA (direita) revela a presença do decágono estrelado e do segmento áureo.



Os pontos que dividem a circunferência em dez partes iguais, além de permitirem a construção do decágono regular, também permitem a construção do decágono regular estrelado.

Fixando uma extremidade nos vértices do decágono podemos prolongar os seus lados e, assim, obter o pentágono estrelado, com vértices nos pontos de encontro dos prolongamentos dos lados, com origem no quarto vértice depois da extremidade fixada, repetindo o processo para todos os vértices do pentágono.



EXERCÍCIOS

1. Demonstrar que a área S de um quadrado de diagonal d é dada por: $S = \frac{d^2}{2}$.

2. A diagonal de um quadrado mede $2\sqrt{7}$. A área desse quadrado, em centímetros quadrados, é igual a:
a) 7
b) 14
c) 21
d) 28
e) 35

3. (FATEC) Se o lado, a altura e a área de um triângulo equilátero formam, nessa ordem, uma progressão geométrica, então a medida do lado desse triângulo é um número:
a) irracional.
b) racional.
c) inteiro.
d) real e maior que $\sqrt{3}$.
e) real e compreendido entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

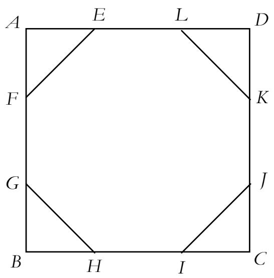
4. (FATEC) A altura de um triângulo equilátero e a diagonal de um quadrado tem medidas iguais. Se a área do triângulo equilátero é $16\sqrt{3}\ \text{m}^2$, então a área do quadrado, em metros quadrados é:
a) 6
b) 24
c) 54
d) 96
e) 150

5. (MACKENZIE) O lado, a altura e a área de um triângulo equilátero formam, nesta ordem, uma progressão geométrica. O perímetro do triângulo é:
a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
c) $3\sqrt{3}$
d) $\sqrt{3}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. (UNIFENAS) Considere um quadrado de lado 2. Unindo os pontos médios dos lados desse quadrado, obtém-se um novo quadrado. Unindo os pontos médios desse novo quadrado obtém-se outro quadrado. Repetindo-se esse processo indefinidamente, a soma das áreas de todos esses quadrados é:
a) 8
b) 32
c) 128
d) 1024
e) infinito

7. (PUC) Seja o octógono $EFGHIJKL$, inscrito num quadrado de 12cm de lado, conforme mostra a figura abaixo.

Se cada lado do quadrado está dividido pelos pontos assinalados em segmentos congruentes entre si, então a área do octógono em centímetros quadrados, é:
a) 98
b) 102
c) 108
d) 112
e) 120



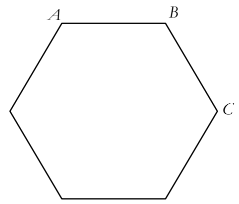
8. (USF) Considere um triângulo equilátero cuja área é numericamente igual ao perímetro. O apótema desse triângulo mede, em centímetros:

a) $2\sqrt{3}$ b) $\frac{4\sqrt{3}}{2}$ c) 2

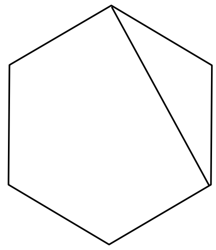
d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

9. (PUC-CAMPINAS) Considere-se o hexágono regular inscrito numa circunferência cujo raio mede 12 cm. A medida do apótema desse hexágono, em centímetros, é:
a) $6\sqrt{3}$
b) $5\sqrt{3}$
c) $4\sqrt{3}$
d) $3\sqrt{3}$
e) $2\sqrt{3}$

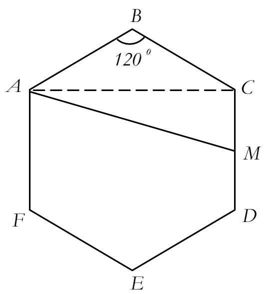
10. (FUVEST) Os pontos A, B e C são vértices consecutivos de um hexágono regular de área igual a 6. Qual a área do triângulo ABC?
a) 1
b) 2
c) 3
d) $\sqrt{2}$
e) $\sqrt{3}$



11. (MACKENZIE) Se o hexágono regular da figura tem área 2, a área do pentágono assinalado é:
a) $\frac{7}{2}$
b) $\frac{7}{3}$
c) $\frac{5}{6}$
d) $\frac{4}{3}$
e) $\frac{5}{3}$



12. (MACKENZIE) $ABCDEF$ é um hexágono regular de lado a. Sabendo que a área do quadrilátero $ABCM$ é um quarto da área do hexágono, o comprimento do segmento AM é:
a) $\frac{5a}{3}$
b) $\frac{7a}{4}$
c) $\frac{9a}{4}$
d) $\frac{7a}{3}$
e) $\frac{5a}{4}$



13. (PUC-MG) A área do polígono regular de apótema a e de n lados, inscrito numa circunferência de raio r, em unidades de área é:
a) $\frac{1}{2}n \cdot a\sqrt{r^2 - a^2}$
b) $\frac{1}{4}n \cdot a\sqrt{r^2 - a^2}$
c) $n \cdot a\sqrt{r^2 - a^2}$
d) $2n \cdot a\sqrt{r^2 - a^2}$
e) $4n \cdot a\sqrt{r^2 - a^2}$

14. (FUND. CARLOS CHAGAS) Sendo A a área de um quadrado inscrito em uma circunferência, a área de um quadrado circunscrito à mesma circunferência é:
a) $4A$
b) $2A$
c) $\frac{4}{3}A$
d) $\sqrt{2}A$
e) $1{,}5A$

8. INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA

COORDENADAS CARTESIANAS NO PLANO

INTRODUÇÃO

René Descartes nasceu em 1596, numa família nobre de La Have, um povoado da Touraine. De 1604 a 1614, estudou no colégio jesuíta de La Flèche. Neste colégio, viveu um regime de privilégios, pois se levantava quando queria, o que o levou a adquirir um hábito que o acompanhou por toda sua vida: meditar no próprio leito.

Apesar de apreciado por seus professores, ele se declara (em o *Discurso sobre o Método*) decepcionado com o ensino que lhe foi ministrado, acreditava que a filosofia escolástica não conduzia a nenhuma verdade indiscutível: "Não encontramos aí nenhuma coisa sobre a qual não se dispute". Afirmava que só as matemáticas demonstravam o que afirmam: "As matemáticas agradavam-me, sobretudo por causa da certeza e da evidência de seus raciocínios". Mas as matemáticas são uma exceção, uma vez que ainda não se tentou aplicar seu rigoroso método a outros domínios. Eis porque o jovem Descartes, decepcionado com a escola, partiu à procura de novas fontes de conhecimento (longe dos livros e dos regentes de colégio), a experiência da vida e a reflexão pessoal: "Assim que a idade me permitiu sair da sujeição a meus preceptores, abandonei inteiramente o estudo das letras; e resolvendo não procurar outra ciência que aquela que poderia ser encontrada em mim mesmo ou no grande livro do mundo, empreguei o resto de minha juventude em viajar, em ver cortes e exércitos, conviver com pessoas de diversos temperamentos e condições".

Mais tarde, na Holanda, Descartes se engajou no exército do príncipe Maurício de Nassau. Mas é um estranho oficial que recusa qualquer soldo, que mantém seus equipamentos e suas despesas e que se declara menos um "ator" do que um "espectador": antes ouvinte numa escola de guerra do que verdadeiro militar. É dessa época, com cerca de 23 anos, que data sua misteriosa divisa *Larvatus Prodeo* (Eu caminho mascarado). Segundo Pierre Frederix, Descartes quer apenas significar que é um jovem sábio disfarçado de soldado.

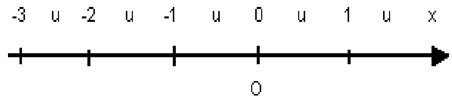
Em 1619 está a serviço do Duque de Baviera, em virtude do inverno, se escondera às margens do Danúbio. Podemos facilmente imaginá-lo alojado "numa estufa", isto é, num quarto bem aquecido por um fogareiro de porcelana, servido por um criado e inteiramente entregue à meditação.

Em seguida, Descartes prepara uma obra de física, o *Tratado do Mundo*, mas renuncia a sua publicação visto que em 1633, toma conhecimento da condenação de Galileu. É certo que ele nada tem a temer da Inquisição.

Finalmente, em 1637, ele se decide a publicar três pequenos resumos de sua obra científica: *A Dióptrica*, *Os Meteoros* e *A Geometria*. Esses resumos, que quase não são lidos atualmente, são acompanhados por um prefácio que o fez famoso, é o *Discurso Sobre o Método*.

EIXO CARTESIANO

Eixo cartesiano é toda **reta orientada**, com origem estabelecida e com um segmento adotado como unitário. Na reta x do exemplo abaixo, consideraremos o ponto O como origem e adotaremos u como unidade de comprimento.

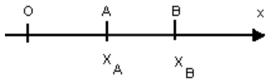


MEDIDA ALGÉBRICA DE UM SEGMENTO

A **medida algébrica** de um segmento orientado sobre um eixo x é o número real que corresponde à diferença entre os valores reais da extremidade e da origem desse segmento.

Se considerarmos A e B, dois pontos de um eixo ordenado (X) correspondentes aos números reais x_A e x_B, temos:

$$\begin{cases} X_A : valor \text{ Re} al\ de\ A \\ X_B : valor \text{ Re} al\ de\ B \end{cases}$$



$$\overline{AB} = x_B - x_A$$

Lembretes:

Se o segmento orientado tiver a mesma direção do eixo considerado, seu sinal será positivo.

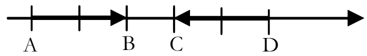
Se o segmento orientado tiver direção oposta a do eixo considerado, seu sinal será negativo.

O módulo de um segmento é o seu comprimento e é dado pelo módulo de sua medida algébrica. Ou seja:

$$|\overline{AB}| = |x_B - x_A|.$$

Exemplo:

Observe a figura abaixo e determine a medida algébrica e o módulo de cada um dos segmentos orientados que estão representados na figura.



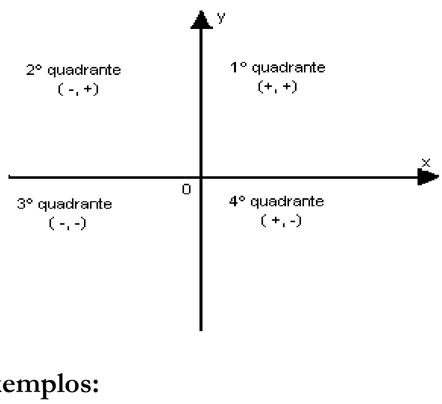
$$AB = +\overline{AB} = 2 \qquad |AB| = |+\overline{AB}| = |2| = 2$$

$$DC = -\overline{DC} = -2 \qquad |DC| = |-\overline{DC}| = |-2| = 2$$

PLANO CARTESIANO

Com o auxílio de um sistema de dois eixos associados a um plano, façamos corresponder a cada ponto do plano, um par ordenado (x, y), determinando um sistema cartesiano ortogonal, ou, **Plano Cartesiano**.

Observe o plano cartesiano e seus quatros quadrantes:



$$\begin{cases} 1^o\ quadrante: x > 0 \text{ e } y > 0 \\ 2^o \text{ quadrante} : x < 0 \text{ e } y > 0 \\ 3^o \text{ quadrante} : x < 0 \text{ e } y < 0 \\ 4^o \text{ quadrante} : x > 0 \text{ e } y < 0 \end{cases}$$

Exemplos:

a) (2, 4) pertence ao 1º quadrante ($x_A > 0$ e $y_A > 0$)

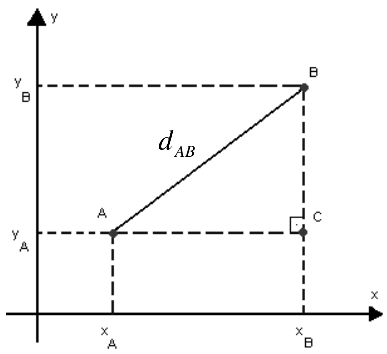
b) (-3, -5) pertence ao 3º quadrante $(x_B < 0 \text{ e } y_B < 0)$.

<u>Observação</u>: por convenção, os pontos localizados sobre os eixos não estão em nenhum quadrante.

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

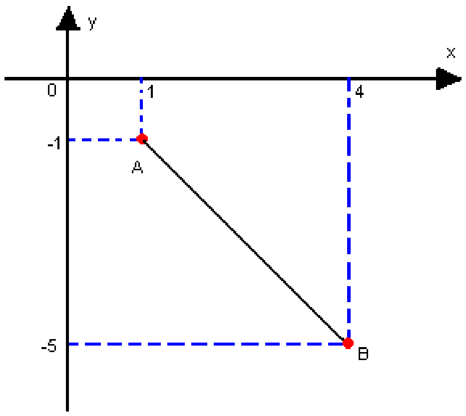
Dados os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, sendo d_{AB} a distância entre eles, temos:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Exemplo:

Determine a distância entre os pontos $A(1,-1)$ e $A(4,-5)$.



$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + (-5+1)^2} \Rightarrow$$
$$d_{AB} = \sqrt{25} = 5$$

DEMONSTRAÇÃO

Da figura do item anterior, temos:

$$\begin{cases} \overline{AC} = |x_B - x_A| \\ \overline{CB} = |y_B - y_A| \end{cases}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, vem:

$$d^2_{AB} = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow d_{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}.$$

Como $AC = x_B - x_A$ e $BC = y_B - y_A$, temos:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

PONTO MÉDIO

Na geometria analítica, o ponto médio de um segmento é dado através da seguinte relação:

$$P_M\left(\frac{X_A + X_B}{2}, \frac{Y_A + Y_B}{2}\right)$$

Exemplo:

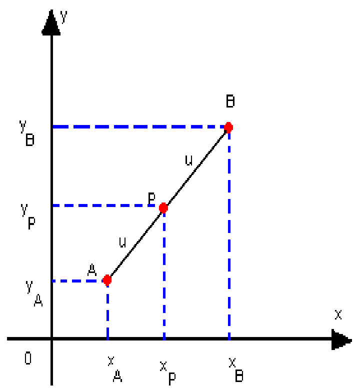
Dados os pontos $A(3;-2)$ e $B(7;-1)$, determinar as coordenadas do ponto médio de $\overline{AB}$.

Sendo $P_M\left(\frac{X_A + X_B}{2}, \frac{Y_A + Y_B}{2}\right)$, então o ponto médio de **AB** é:

$$P_M\left(\frac{(-3)+7}{2}, \frac{6+(-1)}{2}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P_M\left(2, \frac{5}{2}\right)$$

DEMONSTRAÇÃO

No eixo cartesiano, dados os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e o ponto $P(X_p, Y_p)$, que divide o segmento $\overline{AB}$ ao meio, temos:



No eixo ***X***, como x_p é o ponto médio do segmento $X_A X_B$, vem:

$$X_P - X_A = X_B - X_P \Leftrightarrow 2 \cdot X_P = X_A + X_B \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X_P = \frac{X_A + X_B}{2} (\textit{media aritmetica de } X_A \textit{ e } X_B)$$

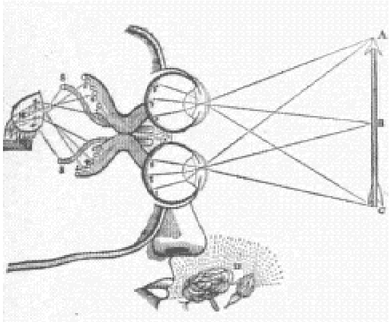
Analogamente, no eixo **y**, sendo y_p o ponto médio de $Y_A Y_B$, temos:

$$Y_P = \frac{Y_A + Y_B}{2}$$

Deste modo, concluímos que as coordenadas do ponto médio são dadas por:

$$P_M\left(\frac{X_A + X_B}{2}, \frac{Y_A + Y_B}{2}\right)$$

CURIOSIDADE



No *Dióptrica*, Descartes apresenta vários desenhos baseados nas leis da reflexão e da refração, com os quais ele tentava compreender como o olho humano forma as imagens.

EXERCÍCIOS

1. Construir um sistema cartesiano cuja unidade de medida nos eixos seja o centímetro e marcar os pontos $A(1,\ 2)$, $B(-2,\ -2)$, $C(0,\ -1)$ e $D(2,\ 0)$.

2. Obter a, sabendo que o ponto $A(2a+1,\ 5)$ está no eixo das ordenadas.

3. A que quadrante pertence o ponto $A(-a,\ b)$, sendo $B(a,\ -b)$ pertencente ao 2º quadrante?

4. Obter m, sabendo que o ponto $M(3m-1,\ \ m+5)$ está na bissetriz dos quadrantes pares.

5. A que quadrante pertence o ponto $P(-a,\ a^2)$, sendo $a<0$?

6. Obter o ponto médio M do segmento AB nos seguintes casos:
$A(3,\ 4)$ e $B(1,\ 8)$

$A(-1,\ 0)$ e $B(2,\ 6)$

$A(-2,\ -1)$ e $B(-4,\ 0)$

7. Obter as coordenadas do ponto de intersecção das diagonais de um quadrado, onde $A(-2,\ 1)$ e $C(8,\ 9)$ são dois vértices opostos.

8. Obter o centro da circunferência cujos extremos de um diâmetro são os pontos $M(2,\ 7)$ e $N(0,\ -1)$.

9. Sabendo-se que $A(1,\ 1)$, $B(3,\ 5)$ e $C(7,\ 9)$ são vértices do paralelogramo $ABCD$, obter o vértice D oposto a B.

10. Determinar os pontos que dividem o segmento de extremos $A(0,\ 5)$ e $B(12,\ 20)$ em três partes congruentes.

11. Determinar os pontos que dividem o segmento de extremos $A(0,\ 4)$ e $B(2,\ 8)$ em quatro partes congruentes.

12. Dados os pontos $A(1,\ 8)$ e $B(3,\ 14)$, obter o ponto C tal que $\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{CB}$.

13. Calcular a distância entre os pontos A e B nos casos:
$A(0,\ 0)$ e $B(6,\ 8)$

$A(1,\ 3)$ e $B(3,\ 5)$

$A(-1,\ 0)$ e $B(1,\ 1)$

$A(-1,\ -2)$ e $B(-1,\ -5)$

14. Calcular o perímetro do triângulo de vértices $A(1,\ 1)$, $B(4,\ 5)$ e $C(8,\ 2)$.

15. Obter a para que a distância entre os pontos $R(a,\ 0)$ e $S(1,\ 2)$ seja $\sqrt{13}$.

9. BARICENTRO, ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS, ÁREA DE UM TRIÂNGULO E COEFICIENTE ANGULAR.

CONTEXTO HISTÓRICO

Blaise Pascal nasceu na província francesa de Auvergne em 1623 e foi um prodígio matemático. A princípio seu pai, que também tinha inclinação para esta ciência, não lhe deu acesso a livros de matemática para que desenvolvesse outros interesses, mas aos doze anos o menino mostrou muito talento geométrico e a partir daí sua inclinação foi encorajada.

Aos quatorze anos já participava de uma reunião semanal com matemáticos franceses e aos dezesseis anos escreveu um trabalho sobre secções cônicas tão completo que Descartes preferiu acreditar que fosse de autoria do seu pai. Entre os dezoito e dezenove anos, inventou a primeira máquina de calcular. Aos vinte anos, aplicou seu talento à física, pois se interessou pelo trabalho de Torricelli sobre pressão atmosférica, deixando como resultado o Princípio de Pascal sobre a lei das pressões num líquido, que publicou em 1653 no seu *Tratado do Equilíbrio dos Líquidos*.

Em 1648 escreveu um inteligente manuscrito sobre secções cônicas que não foi publicado. Este manuscrito se baseava na obra de Desargues e foi lido por Descartes e Leibniz. Nele estava um dos mais ricos teoremas da geometria projetiva, o Teorema do Hexagrama Místico de Pascal: se um hexágono está inscrito numa cônica, então os pontos de intersecção dos três pares de lados opostos são colineares reciprocamente.

Em 1650, por estar com a saúde debilitada, resolveu abandonar suas pesquisas e se dedicar à contemplação religiosa. Porém, três anos mais tarde retornou à matemática. Nesse período, escreveu seu Traité du Triangle Arithmétique, conduziu diversas experiências sobre a pressão dos fluidos e, juntamente com Fermat, lançou os fundamentos da teoria da probabilidade.

O Traité du Triangle Arithmétique de Pascal foi escrito em 1653, mas só foi publicado em 1665. Pascal construiu seu "triângulo aritmético", em que qualquer elemento é a soma de todos os elementos da linha anterior situados exatamente acima ou à esquerda do elemento desejado. Como na terceira linha, onde: 15 = 5 + 4 + 3 + 2 + 1.

1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	...
1	3	6	10	15	...
1	4	10	20	35	...
1	5	15	35	70	...

O triângulo é obtido desenhando-se a diagonal como na figura acima. Uma das aplicações que Pascal fazia do seu triângulo era a determinação dos coeficientes binomiais. Por exemplo, os números ao longo da quarta diagonal 1,3,3,1 são os coeficientes sucessivos da expansão de $(a+b)^3$. Ele também o usava em suas discussões sobre probabilidade. Embora não tenha sido o primeiro a trabalhar com esse triângulo, que se tornou conhecido como Triângulo de Pascal, devido ao desenvolvimento e aplicações que fez de muitas de suas propriedades.

No fim de 1654, se salvou por um milagre de um acidente, o que considerou como um aviso divino e então voltou às suas meditações religiosas. Uma noite, em 1658, uma dor de dente o impediu de dormir e para passar o tempo, voltou-se ao estudo da ciclóide e a dor subitamente cessou. Considerando isso como manifestação de uma vontade divina, voltou a desenvolver tais ideias e mais tarde propôs alguns problemas desafios.

A ciclóide foi o seu último trabalho. Esta curva muito rica em propriedades matemáticas e físicas, foi importante no desenvolvimento inicial dos métodos do cálculo. Por possuir diversas propriedades bonitas e interessantes e gerar tantas controvérsias, foi chamada de "a Helena da geometria" ou "o pomo da discórdia".

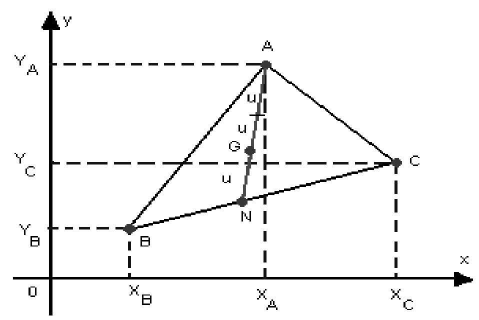
Pascal também escreveu *Cartas a um Provincial e Pensamentos*, que hoje são considerados obras-primas da literatura francesa. A invenção do carrinho de mão de uma roda e a ideia do ônibus também são dele.

Considerado como a maior das "promessas" na história da matemática, Pascal poderia ter produzido uma obra muito maior se não sofresse de padecimentos físicos e se não fosse levado a participar das controvérsias religiosas de sua época. Sua curta vida terminou em Paris em 1662.

Texto adaptado de: Fernanda Buhrer Rizzato; supervisão e orientação: prof. Doutor Francisco César Polcino Milies

BARICENTRO DE UM TRIÂNGULO

No plano cartesiano, considere um triângulo qualquer ABC, de coordenadas $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$



As coordenadas do baricentro (ponto de encontro das medianas) podem ser determinadas através da seguinte expressão:

$$G = \left(\frac{X_A + X_B + X_C}{3}, \frac{Y_A + Y_B + Y_C}{3} \right)$$

Exemplo:

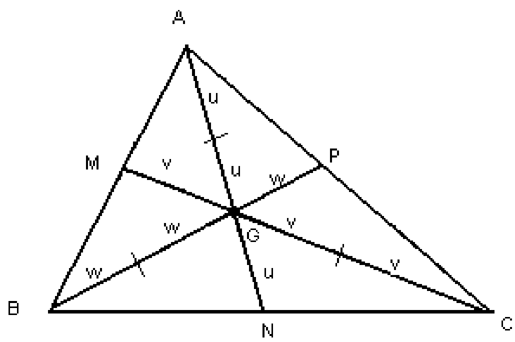
Num plano cartesiano, considere um triângulo qualquer ABC, de coordenadas $A(1,1)$, $B(2,4)$ e $C(5,3)$ (construa o gráfico observando o modelo acima).

Sabendo que, $G = \left(\frac{X_A + X_B + X_C}{3}, \frac{Y_A + Y_B + Y_C}{3} \right)$, temos:

$$G = \left(\frac{1+2+5}{3}, \frac{1+4+3}{3} \right) \Leftrightarrow G = \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3} \right)$$

DEMONSTRAÇÃO

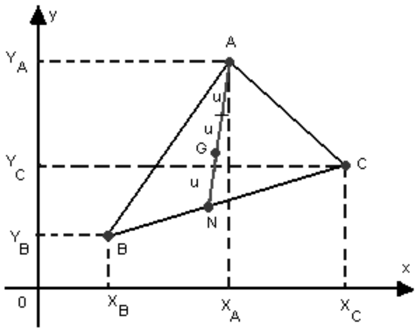
1º passo: observe o triângulo da figura a seguir, em que M, N e P são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, respectivamente. Portanto, $\overline{AN}$, $\overline{BP}$ e $\overline{CM}$ são as medianas desse triângulo:



Logo, o **Baricentro** divide as medianas em duas partes; a que vai do vértice até o baricentro, que tem o dobro da medida da que vai do baricentro até o ponto médio do lado.

$$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GN}$$
$$\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GP}$$
$$\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM}$$

2º passo: sendo $A(X_A, Y_A)$, $B(X_B, Y_B)$ e $C(X_C, Y_C)$, vértices de um triângulo, se N é ponto médio de $\overline{BC}$, temos:



$$N\left(\frac{X_B + X_C}{2}, \frac{Y_B + Y_C}{2}\right)$$

Lembrando que, $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GN}$, temos: $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{GN}} = 2$.

Logo,

$$\Leftrightarrow \frac{X_G - X_A}{X_N - X_G} = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X_G - X_A = 2(X_N - X_G) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X_G + 2 \cdot X_G = 2 \cdot X_N + X_A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3 \cdot X_G = 2\left(\frac{X_B + X_A}{2}\right) + X_A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3X_G = X_B + X_C + X_A$$

Portanto,

$$X_G = \frac{X_A + X_B + X_C}{3}$$

Analogamente, podemos determinar:

$$Y_G = \frac{Y_A + Y_B + Y_C}{3}$$

Assim:

$$G = \left(\frac{X_A + X_B + X_C}{3}, \frac{Y_A + Y_B + Y_C}{3}\right)$$

CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS

Se três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ estão alinhados (colineares), então seu determinante é igual a zero.

$$\det\begin{pmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_C & Y_C & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Exemplo:

Verifique se os pontos A(1, 1), B(2, 2) e C(3, 3) são colineares.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

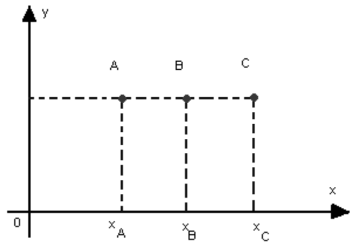
Pela Regra de Sarros, temos:

$$\det = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

DEMONSTRAÇÃO

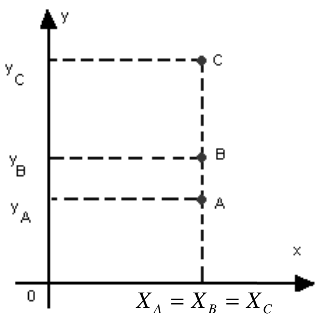
Para demonstrar esse teorema devemos considerar três casos:

1º caso: três pontos alinhados horizontalmente.



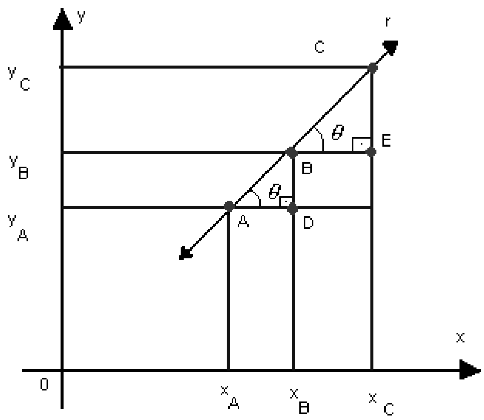
Neste caso, as ordenadas são iguais $(Y_A = Y_B = Y_C)$ e o determinante é nulo. Tente calculá-lo.

2º caso: três pontos alinhados verticalmente.



Neste caso, as abscissas são iguais $(X_A = X_B = X_C)$ e o determinante é nulo. Tente calculá-lo.

3º caso: três pontos numa reta transversal aos dois eixos.



Pela figura, verificamos que os triângulos ABD e BCE são semelhantes. Então:

$$\frac{AD}{BE} = \frac{DB}{EC} \Leftrightarrow \frac{X_B - X_A}{X_C - X_B} = \frac{Y_B - Y_A}{Y_C - Y_B} \Rightarrow$$
$$(Y_C - Y_B)(X_B - X_A) = (Y_B - Y_A)(X_C - X_B)$$

Logo,

$$(Y_C - Y_B)(X_B - X_A) - (Y_B - Y_A)(X_C - X_B) = 0.$$

Como,

$$\det\begin{pmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_C & Y_C & 1 \end{pmatrix} = .$$

$$= (Y_C - Y_B)(X_B - X_A) - (Y_B - Y_A)(X_C - X_B)$$

Temos,

$$\det\begin{pmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_C & Y_C & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

<u>Observação</u>: a recíproca da afirmação demonstrada é válida, ou seja, se,

$$\det\begin{pmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_C & Y_C & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

então, os pontos $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ estão alinhados.

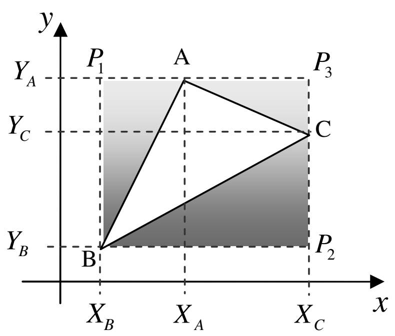
ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Consideremos o triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$. A área do triângulo ABC vale:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}.|D|$$

onde, $D = \det\begin{pmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_C & Y_C & 1 \end{pmatrix}$.

DEMONSTRAÇÃO



A partir da figura, podemos observar que a área do triângulo ABC é igual à área do retângulo $P_1P_3P_2B$ menos as áreas dos triângulos ABP_1, ACP_3 e BCP_2.

Fazendo $S = \frac{b.h}{2}$ para os três triângulos e $S = b.h$ para o retângulo, temos:

$$S_{\triangle ABP_1} = \frac{1}{2}.(X_A - X_B)(Y_A - Y_B)$$

$$S_{\triangle ACP_3} = \frac{1}{2}.(X_C - X_A)(Y_A - Y_C)$$

$$S_{\triangle BCP_2} = \frac{1}{2}.(X_C - X_B)(Y_C - Y_B)$$

$$S_{\square P_1P_3P_2B} = (X_C - X_B)(Y_A - Y_B).$$

Como

$$S_{\triangle ABC} = S_{\square P_1P_3P_2B} - S_{\triangle ABP_1} - S_{\triangle ACP_3} - S_{\triangle BCP_2},$$

simplificando, temos:

$$S = \frac{1}{2}\Big[X_A Y_B + X_C Y_A + X_B Y_C - X_C Y_B - X_A Y_C - X_B Y_A\Big]$$

que pode ser escrito sob a forma:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_C & Y_C & 1 \end{pmatrix}$$

Para que o sinal do determinante não interfira no resultado, devemos tomá-lo em módulo, daí:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_C & Y_C & 1 \end{vmatrix}\right). \qquad \text{c.q.d}$$

COEFICIENTE ANGULAR

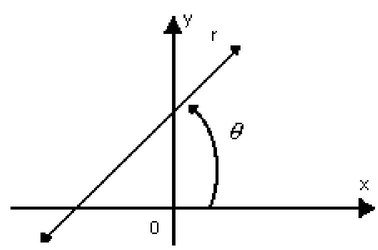
Chamamos de coeficiente angular (ou declividade) uma reta não vertical à tangente trigonométrica da sua inclinação**,** representada por m:

$$m = tg\,\theta\,(\theta \neq 90°).$$

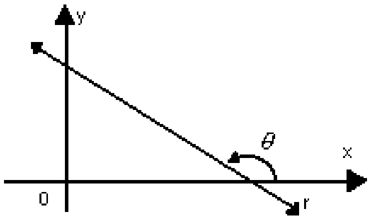
A inclinação θ de uma reta é o menor ângulo entre a reta e o semi-eixo Ox, orientado no sentido anti-horário, do eixo do x para a reta. Desse modo, temos sempre $0 \leq \theta < 2\pi$.

De acordo com esta definição, teremos quatro casos a analisar:

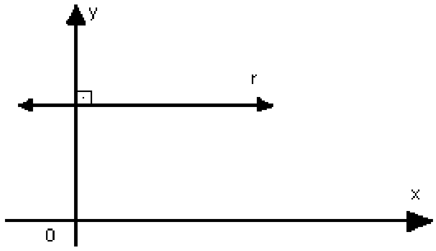
1º caso: $0° < \theta < 90°, e\ m > 0$ (a tangente é positiva no 1º quadrante).



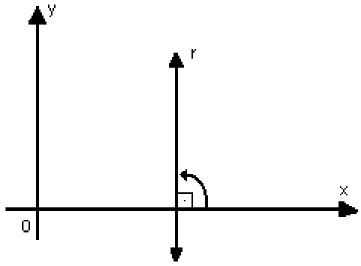
2º caso: $90° < \theta < 180°, e\ m < 0$ (a tangente é negativa no 2º quadrante).



3º caso: $\theta = 0^{o}\ e\ m = 0$.

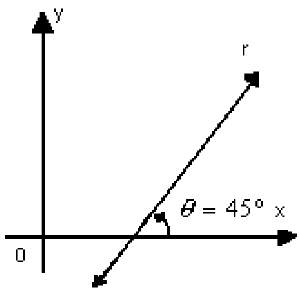


4º caso: $\theta = 90^{o}$, m não existe.

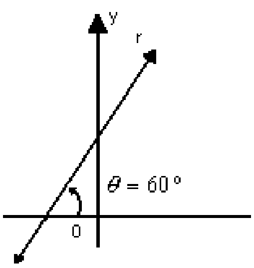


Exemplos:

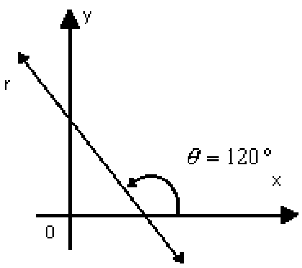
1) $\theta = 45^{o} \Rightarrow m = tg\,45^{o} = 1$



2) $\theta = 60^{o} \Rightarrow m = tg\,60^{o} = \sqrt{3}$

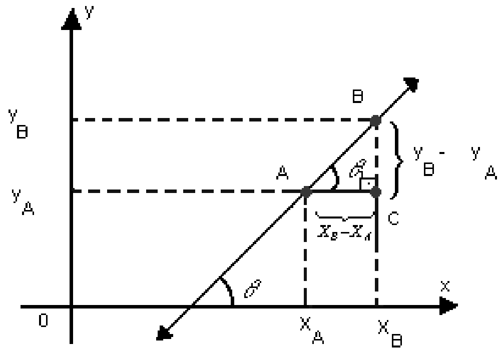


3) $\theta = 120^{o} \Rightarrow m = tg\,120^{o} = -\sqrt{3}$



CÁLCULO DO COEFICIENTE ANGULAR

Observe a figura e repare que $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ as coordenadas de dois pontos distintos numa mesma reta.



Como podemos ver, formamos o triângulo ABC , retângulo em C. Sabendo que o cateto adjacente ao ângulo θ tem comprimento igual a $x_B - x_A$ e o oposto igual a $y_B - y_A$, podemos concluir:

$$tg\,\theta = \frac{cat\ \ oposto}{cat\ \ adjacente} \Rightarrow$$

$$tg\,\theta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} .$$

Mas, como $m = tg\,\theta$ temos:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} .$$

Exemplo:

O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A(2,-3)\,e\,B(-2,5)$ é obtido da seguinte maneira:

Como $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, temos:

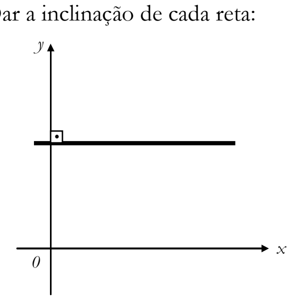
$$m = \frac{5-(-3)}{-2-2} = \frac{8}{-4} = -2$$
$$\therefore m = -2$$

Desenhe a reta no Plano Cartesiano e faça igual como na figura acima.

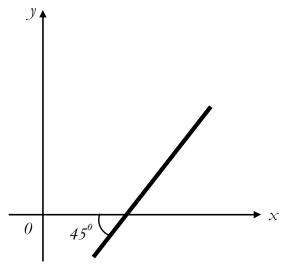
EXERCÍCIOS

1. Dar a inclinação de cada reta:

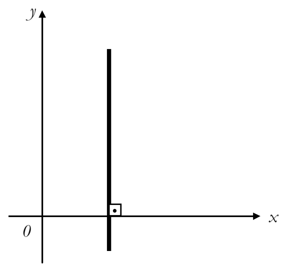
I)-



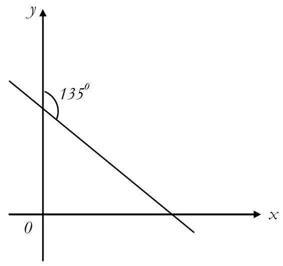
II)



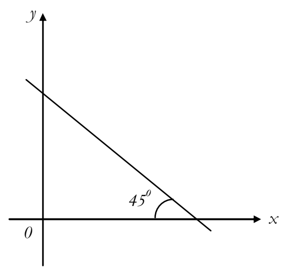
III)



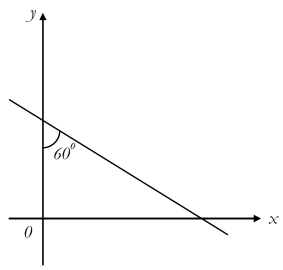
IV)



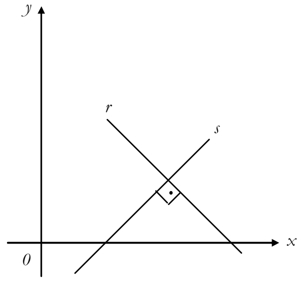
V)



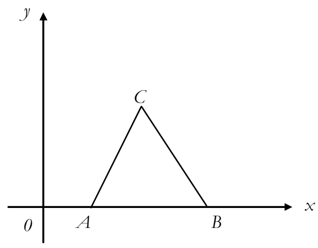
VI)



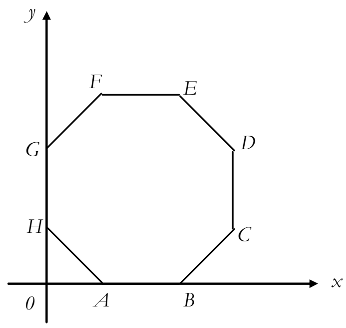
2. Na figura, as retas r e s são perpendiculares. Dar a inclinação de r, sabendo-se que s tem inclinação igual 20°.



3. Na figura abaixo, o triângulo ABC é equilátero. Dar os coeficientes angulares das retas suportes dos lados AB, AC e BC.



4. Na figura, vê-se um octógono regular. Dar os coeficientes angulares das retas suportes dos lados AB, BC, CD e DE.



5. Verificar se os pontos A, B e C são colineares nos casos abaixo:
a) $A(-1,\ 3)$, $B(-1,\ 7)$ e $C(-1,\ 9)$

b) $A(0,\ 3)$, $B(1,\ 1)$ e $C(4,\ -5)$

6. Obter a para que os pontos A, B e C sejam colineares nos casos:
a) $A(3,\ -1)$, $B(3,\ 2)$ e $C(a,\ 5)$

b) $A(1,\ 3)$, $B(2,\ 5)$ e $C(4,\ a)$

7. Mostrar que os pontos $A(a,\ 2a-1)$, $B(a+1,\ 2a+1)$ e $C(a+2,\ 2a+3)$ são colineares para todo valor real dado a a.

8. Qual é a condição para que os pontos $A(0,\ 1)$, $B(3,\ 10)$ e $C(5,\ c)$ sejam vértices de um triângulo?

9. Calcular a área do triângulo de vértices A(1,3), B(4,1) e C(6,5).
a) 16
b) 4
c) 10
d) 12
e) 8

10. Calcular a área do triângulo de vértices A(1,1), B(7,8) e C(1,10).
a) 27
b) 54
c) 32
d) 19
e) 43

11. Calcular a área do quadrilátero de vértices A(1,3), B(5,1), C(6,5) e D(3,7).
a) 17
b) 34
c) 10
d) 6
e) 8

12. (UFMG) Determinar o perímetro e a área do triângulo $A(1,3), B(4,7)\ e\ C(6,5)$.

13. (FAU) Determine a área do triângulo ABC, onde A, B e C são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos $\overline{MN}, \overline{NP}\ e\ \overline{PM}$, sendo $M(-1,-5), N(1,3)\ e\ P(7,-5)$.

14. (UN - Paraná) Se os três pontos $A\left(\frac{1}{2},1\right)$, $B(-3,4)$ e $C\left(t,-\frac{1}{2}\right)$ são colineares, então o valor de t é:
a) $\frac{9}{4}$
b) $\frac{5}{2}$
c) 1
d) $\frac{1}{2}$
e) $-\frac{9}{4}$

15. (FUVEST) Para que valores de a, os pontos $A(0,a), B(a,-4)\ e\ C(1,2)$ são vértices de um mesmo triângulo?

10. EQUAÇÕES DE UMA RETA

CONTEXTO HISTÓRICO

Descartes defendia que a razão era comum a todos os homens. O filósofo percebeu, no entanto, que o modo de usarmos a razão diferia de pessoa para pessoa. Perante este fato, iniciou uma busca sobre o modo correto de utilização da razão. Tendo as teorias matemáticas se apresentando como modelo do conhecimento verdadeiro e rigoroso, ele quis alargá-la a todos os domínios do conhecimento. A *mathesis universalis* (matemática universal) é a designação que Descartes atribuiu a esse projeto.

Refletindo na matemática universal mais atentamente, acabou por se tornar claro que todas as coisas nas quais se observa a ordem e a medida, se reportam à matemática. Neste contexto, pouco importa se esta medida é buscada nos números, figuras, astros, sons, ou em qualquer outro objeto, afinal deve existir uma ciência geral que explica tudo o que é possível investigar no que diz respeito à ordem e à medida, sem aplicação a qualquer matéria especial. A matemática universal (mathesis universalis) se designa, não através de um nome de empréstimo, mas de um nome já antigo e aceito pelo uso, dado a conter tudo aquilo que partiu da matemática e originou outras ciências.

René Descartes, Regras, A.T., X, 377-378 (modificado)

EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DE UMA RETA

Teorema: a toda reta **r** não paralela ao eixo **y** no plano cartesiano, associa-se uma equação do tipo:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Tal equação denomina-se equação fundamental da reta no plano.

DETERMINAÇÃO DA EQUAÇÃO FUNDAMENTAL

1º Caso: seja **r** uma reta no plano, que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular **m**. Sendo $Q(x, y)$ um ponto genérico da reta **r** distinto de **P**, podemos calculara a equação fundamental de **r** da seguinte maneira:

- temos que o coeficiente angular **m** é dado por: $m = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$

- multiplicando em cruz, obtemos a seguinte expressão: $y - y_0 = m(x - x_0)$ que é a equação fundamental da reta.

2º Caso: seja **r** uma reta no plano, que passa pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, podemos calcular a equação fundamental de **r** da seguinte maneira:

- calculamos o coeficiente angular $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

- com os pontos **A** ou **B,** recaímos no 1ºcaso. Ou seja, obtemos: $y - y_A = m(x - x_A)$ ou $y - y_B = m(x - x_B)$,
que é a equação fundamental da reta.

Exemplos:

1) a) Obter a equação fundamental da reta **r** que passa pelo ponto $P(1,5)$ e tem coeficiente angular igual a 2.

b) Verifique se os pontos $A(-1,1)$, $B(3,0)$ pertencem a reta **r.**

Resolução:

a) $y - 5 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x + 3$

b) $1 = 2(-1) + 3$ (verdade, logo a pertence a r)

$0 = 2 \cdot 3 + 3$ (falso, logo, b não pertence a r)

2) Obter a equação fundamental da reta que passa pelos pontos $A(1,2)$ *e* $B(3,8)$.

Resolução:

Primeiro calculamos o coeficiente angular da reta considerada: $m = \dfrac{8-2}{3-1} = 3$.

Agora que temos o coeficiente angular, podemos tomar qualquer um dos pontos para obter a equação desejada. Assim, tomando o ponto **A**, temos: $y - 2 = 3(x - 1)$.

EQUAÇÃO GERAL

Teorema: a toda reta **r** no plano cartesiano, associa-se uma equação do tipo $ax + by + c = 0$, com **a** e **b** não simultaneamente nulos. Tal equação denomina-se <u>equação geral</u> da reta.

DETERMINAÇÃO DA EQUAÇÃO GERAL

Podemos determinar a equação geral de duas maneiras.

1º Caso: a partir da equação fundamental.

2º Caso: dados os pontos $A(xA, yA)$ *e* $B(xB, yB)$, a equação geral da reta **AB** é obtida a partir do determinante. Veja:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ambos os casos resultam na equação: $ax + by + c = 0$, denominada **Equação Geral** da reta.

Exemplos:

1º Caso: dada a equação fundamental $y - 1 = \dfrac{3}{2}(x + 2)$ temos:

$$y - 1 = \frac{3}{2}x + 3 \Rightarrow \text{2y-2=3x+6} \Rightarrow 3x - 2y + 8 = 0$$

2º Caso: determine a equação geral da reta **r** que passa por $A(1, 3)$ *e* $B(2, 4)$.

Considerando um ponto $P(x, y)$ pertencente a **r**, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + 2y + 4 - 6 - 4x - y = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0$$

Agora, verifique se os pontos $P(-3, -1)$ *e* $Q(1, 2)$ pertencem à reta r do exemplo anterior.

Substituindo as coordenadas de **P** em $x - y + 2 = 0$, temos: $-3 - (-1) + 2 = 0 \Rightarrow -3 + 1 + 2 = 0$.

Como a igualdade é verdadeira, então $P \in r$.

Substituindo as coordenadas de **Q** em $x - y + 2 = 0$, obtemos: $1 - 2 + 2 \neq 0$.

Como a igualdade não é verdadeira, então $Q \notin r$.

DEMONSTRAÇÃO:

1º Caso: na equação fundamental, tomando $m = \frac{-a}{b}$, temos:

$$y - y_0 = \frac{-a}{b}(x - x_0) \to ax + by + ax_0 - by_0,$$

tomando $ax_0 - by_0 = c$.

Seja **r** uma reta no plano cartesiano determinada pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, distintos entre si. Se $P(x, y)$ é um ponto qualquer de **r** então, **A**, **B** e **P** estão alinhados e, assim, a partir da condição de alinhamento de três pontos, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x_B y_A - x y_B - x_A y + x y_A + x_B y + x_A y_B \Rightarrow$$

$$(y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + (x_A y_B - x_B y_A) = 0$$

Como as diferenças $(y_A - y_B)$, $(x_B - x_A)$ e $(x_A y_B - x_B y_A)$ são números reais, podemos fazer a seguinte substituição:

$$y_A - y_B = a$$
$$x_B - x_A = b$$
$$x_A y_B - x_B y_A = c$$

Note que **a** e **b** são simultaneamente não nulos, pois $A \neq B$, deste modo temos: $ax + by + c = 0$.

EQUAÇÃO REDUZIDA

Teorema: a toda reta **r**, não paralela ao eixo **y**, no plano cartesiano, associa-se uma equação do tipo: $y = mx + q$. Tal equação denomina-se **Equação Reduzida** da reta.

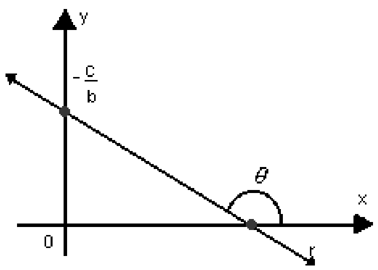
DETERMINAÇÃO DA EQUAÇÃO REDUZIDA

A equação reduzida pode ser obtida através da equação geral da reta: $ax + by + c = 0$.

Seja a equação geral de uma reta no plano, temos:

$$by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{c}{b}.$$

E, graficamente, fica:



Fazendo $-\frac{a}{b} = m$ e $-\frac{c}{b} = q$, vem: $y = mx + q$, que é a equação reduzida da reta no plano.

Observações: note que a equação reduzida pode ser interpretada como sendo uma função do 1º grau. Ou seja, $m = -\frac{a}{b}$ é o coeficiente angular da reta. Quando a reta for paralela ao eixo **y**, não existe a equação na forma reduzida, pois na equação geral da reta, teríamos $b = 0$.

Exemplo:

Determine a equação reduzida da reta a partir da equação geral do exemplo anterior.

$$x - y + 2 = 0 \Rightarrow -y = -x - 2 \Rightarrow y = x + 2$$

EQUAÇÃO SEGMENTÁRIA

Teorema: seja **r** uma reta não paralela a nenhum dos eixos cartesianos, chamamos de **Equação Segmentária da Reta no Plano** a seguinte expressão:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

DETERMINAÇÃO DA EQUAÇÃO SEGMENTÁRIA

A equação segmentária pode ser obtida através da equação geral da reta. Seja $ax + by + c = 0$ a equação geral de **r**, com $a = 0,\ b = 0\ e\ c = 0$, temos:

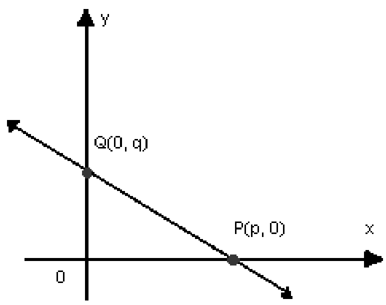
$$ax + by = -c \Rightarrow \frac{-ax}{c} - \frac{by}{c} = 1.$$

Fazendo $p = \frac{-c}{a}$ e $q = \frac{-c}{b}$ temos:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

que é a equação segmentária da reta.

A reta **r** não é paralela a nenhum dos eixos cartesianos, ela os intercepta. Observe que na figura abaixo que se tomarmos $y = 0$, teremos $x = p$, com a reta r interceptando os eixos x e y:



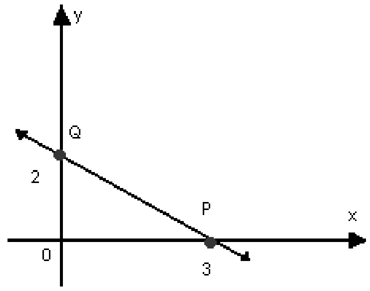
Exemplos:

1) Determine a equação segmentária a partir da equação geral: $3x + 2y - 6 = 0$.

$$3x + 2y = 6 \to \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1,$$

que é a equação segmentária da reta no plano.

2) Determine a equação segmentária da reta que passa por P(3, 0) e Q(0, 2), conforme o gráfico:



$$p = 3 \qquad q = 2$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

Enquanto as equações reduzidas, geral e segmentária de uma reta relacionam numa única equação - as coordenadas **x** e **y** de um ponto da reta - as equações **paramétricas** dão as coordenadas x e y em função de uma outra variável real **t**, que é chamada de **parâmetro**.

Escreve-se:

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{aligned}$$

DETERMINAÇÃO DA EQUAÇÃO PARAMÉTRICA

Para entendermos como fazer para parametrizar uma reta, vamos ver alguns exemplos:

1) Dada a equação geral $x - 2y + 7 = 0$, da reta **r**, determine a equação paramétrica de **r**.

Resolução:

Fazendo $x + 7 = t$, temos:

$$\begin{aligned} x &= t - 7 \\ y &= \frac{t}{2} \end{aligned}$$

Poderíamos também fazer $-2y + 7 = t$, e obter a seguinte equação paramétrica:

$$\begin{aligned} x &= -t \\ y &= -\frac{t}{2} + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

2) Obtenha a equação geral da reta, cujas equações paramétricas são:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(t + 1) \\ y &= 3t - 2 \end{aligned}$$

Resolução:

Nas equações paramétricas, isolamos os parâmetros **t** e obtemos: $t = 2x - 1$ (I) e $t = (y + 2)/3$ (II).

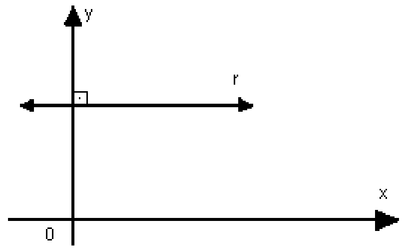
Fazendo $I = II$ temos:

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= (y + 2)/3 \\ 6x - y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

CASOS PARTICULARES DA EQUAÇÃO DA RETA

Temos três casos particulares para considerar, vejamos quais são eles.

1º caso: quando uma reta é paralela ao eixo das abscissas (x).



Equação Fundamental: dado um ponto $P(x_0, y_0)$ qualquer da reta considerada, temos: $\begin{aligned} y - y_0 &= 0(x - x_0) \\ y &= y_0 \end{aligned}$.

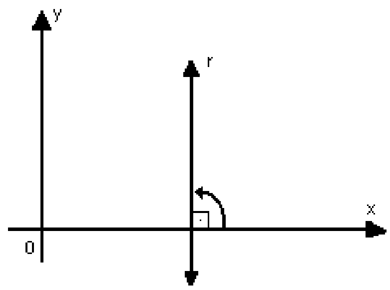
Equação Geral: sendo, $a = 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, na equação geral temos: $by + c = 0$.

Equação Reduzida: como obtemos a equação reduzida a partir da geral, temos: $y = -\frac{c}{b}$.

Equação Segmentária: não existe equação segmentária de reta paralela a qualquer um dos eixos.

Equação Paramétrica: a equação paramétrica da reta paralela ao eixo das abscissas é: $y = k = cte$.

2º caso: quando uma reta é paralela ao eixo das ordenadas (y).



Equação Fundamental: não existe equação fundamental de reta paralela ao eixo das ordenadas.

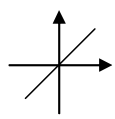
Equação Geral: sendo, $a \neq 0$, $b=0$ e $c \neq 0$ então, na equação geral temos: $ax + c = 0$.

Equação Reduzida: como obtemos a equação reduzida a partir da geral, temos: $x = -\frac{c}{a}$.

Equação Segmentária: não existe equação segmentária de reta paralela a qualquer um dos eixos.

Equação Paramétrica: a equação paramétrica da reta paralela ao eixo das ordenadas é: $x = k = cte$.

3º caso: quando a reta passa pela origem do plano.



Equação Fundamental: neste caso, a equação fundamental não muda em nada.

Equação Geral: sendo, $a \neq 0, b \neq 0$ e $c = 0$ então, na equação geral temos: $ax + by = 0$.

Equação Reduzida: como obtemos a equação reduzida a partir da geral, temos: $y = -\frac{ax}{b}$.

Equação Segmentária: não existe equação segmentária de reta que passa pela origem.

Equação Paramétrica: a equação paramétrica da reta que passa pela origem não muda.

CURIOSIDADE

Descartes teve grande influência no desenvolvimento da filosofia, repercutindo nos estudos da matemática e também nos campos da justiça e da teologia. Acima de tudo, seu trabalho filosófico teve um grande impacto sobre o pensamento europeu e influenciou muitos dos filósofos que vieram posteriormente, ao longo dos séculos XVII e XVIII, quando suas ideias filosóficas estiveram sempre presentes. Grandes filósofos como John Locke, David Hume e Immanuel Kant utilizaram suas teorias e princípios. Por estas razões, ele é frequentemente chamado de o pai da filosofia moderna.

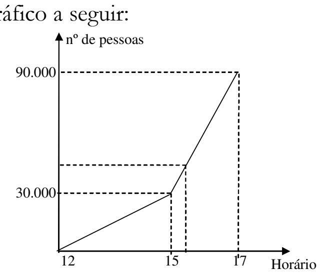
EXERCÍCIOS

1. Dados os pontos $A(2,1)$ *e* $B(3,3)$, determine a equação geral e a equação reduzida da reta AB. Em seguida, esboce o seu gráfico no sistema cartesiano.

2. (UFRJ) Em uma partida, Vasco e Flamengo levaram ao Maracanã noventa mil torcedores. Três portões foram abertos às 12 horas e até às 15 horas entrou um número constante de pessoas por minuto. A partir deste horário abriram-se mais três portões e o fluxo constante de pessoas aumentou. Os pontos que definem o número de pessoas dentro do estádio em função do horário de entrada estão contidos no gráfico a seguir:

Quando o número de torcedores atingiu 45 mil, o relógio estava marcando 15 horas e...

a) 20 min
b) 30 min
c) 40 min
d) 50 min
e) 60 min



3. (FUVEST) Os pontos $(a;1)$ e $(2;b)$ estão sobre a reta $x+2y=0$, a distância entre eles é:

a) $2\sqrt{5}$
b) $\sqrt{6}$
c) $\sqrt{10}$
d) 2
e) $4\sqrt{5}$

4. (FCC) As retas **r** e **s** são definidas por $y=2x+1$ e $5y+2x-2=0$. A reta vertical que contém o ponto de intersecção de **r** e **s** é definida por:

a) $x=-3/8$
b) $y=1/4$
c) $x=-1/4$
d) $x=3/8$
e) $x=-4$

5. (MAUÁ) Dado o feixe de retas $(2\lambda+1)x-(\lambda+1)y+4-2\lambda=0$, pede-se para determinar o parâmetro lâmbida correspondente à reta que passa pelo ponto ***A* (2,3)**.

6. (FUVEST) Se o ponto (x_0, y_0) pertence ao gráfico da função $y = tg\ x$, então uma condição necessária e suficiente para que o ponto (a, y_0) também pertença a esse gráfico é:

a) $a = tg\ x_0$
b) que $(a\text{-}x_0)$ seja múltiplo de π
c) $a=\pi/2$
d) $a = \text{arctg}\ x_0$
e) $(a - x_0) = 2k\pi,\ k \in$ □

7. (FUVEST) Se o domínio da função $y = 2x - 1$ é o conjunto $\{x \in$ □ $| -1 \le x \le 2\}$, o seu conjunto-imagem é:

a) $\{y \in$ □ $| -1 \le y \le 3\}$
b) $\{y \in$ □ $| -3 \le y \le 1\}$
c) $\{y \in$ □ $| -3 \le y \le 3\}$
d) $\{y \in$ □ $| -1 \le y \le 1\}$
e) □

8. (MACKENZIE) A reta $y=-2$ é a mediatriz do segmento que une os pontos:

a) $A(0;0)$ e $B(0;-4)$
b) $A(0;0)$ e $B(0;-2)$
c) $A(0;-4)$ e $B(-4;0)$
d) $A(-4;0)$ e $B(0;0)$
e) $A(-4;-4)$ e $B(0;0)$

9. (UNA) A reta **R** passa pelos pontos $(2,5)$ e $(5,9)$. Um outro ponto dessa reta é:

a) $(500;669)$
b) $(500;670)$
c) $(500;671)$
d) $(500;672)$
e) $(500;673)$

10. (UELON) Seja **f** a função de □ em □ definida por $f(x)=(k2-4)\cdot x+3k$, na qual **k** é uma constante real. Se **f** é decrescente e seu gráfico intercepta o eixo das abscissas no ponto (1,0), então um outro ponto do gráfico de **f** é:

a) $(-3;6)$
b) $(-2;9)$
c) $(-1;1)$
d) $(2;3)$
e) $(0;6)$

11. (UCMG) O gráfico da função definida por $\begin{vmatrix} 2 & 4 & x \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & y \end{vmatrix} = 0$

a) intercepta o eixo x no ponto $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.
b) intercepta o eixo y no ponto $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.
c) determina, com os eixos coordenados, um triângulo de área um.
d) passa pela origem do sistema cartesiano.
e) é paralelo ao eixo x.

12. (FEI) A reta que passa pelos pontos $A=(1,2)$ e $B=(3,3)$, tem por equação:

a) $y=\frac{x}{2}+3$

b) $y=-\frac{x}{2}+3$

c) $y=\frac{x}{2}-1$

d) $y=-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$

e) $y=-\frac{x}{2}+2$

13. (PUC-RS) Uma reta **r** é paralela ao eixo das abscissas e passa pelo ponto $(2,-3)$. Outra reta **s** passa pela origem e intercepta a reta **r** no ponto de abscissa 3. A área da região limitada pelo eixo das ordenadas e pelas retas **r** e **s**, em unidades de área, é:

a) 1,5
b) 2,5
c) 3,5
d) 4.5
e) 5,5

14. (F.Carlos Chagas) Num sistema de eixos ortogonais, a reta que passa pelo ponto **P(2,3)** e é paralela ao eixo **y** pode ser corretamente representada por:

a) $x=2$
b) $y=3$
c) $y=2$
d) $y=x+2$
e) $y-2=x-3$

15. (FEI) A reta determinada por A(3,-2) e B(m,n), passa pela origem. Qual é a relação entre m e n?

16. (Mackenzie) A equação da reta paralela ao eixo Ox e que passa pela intersecção das retas $3x+7y-7=0$ e $4x+6y-5=0$ é:

a) $y=\frac{13}{2}.x$

b) $x=\frac{13}{2}$

c) $y=\frac{13}{2}$

d) $y=\frac{13}{2}.x+\frac{3}{2}$

e) $x=\frac{13}{2}.y+\frac{3}{2}$

17. (F. Carlos Chagas) O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $A\left(0,\frac{1}{m}\right)$ e $B\left(-\frac{1}{m},0\right)$, com $m\neq 0$, é:

a) m
b) $-m$
c) 1
d) -1
e) m^2

18. (F. Carlos Chagas) O triângulo ABC tem vértices $A(0,0)$, $B\left(-\frac{3}{5},\frac{3}{5}\right)$ e $C\left(\frac{3}{5},\frac{3}{5}\right)$. A equação da reta que passa por A e pelo ponto médio de BC é:

a) $x=0$
b) $y=0$

c) $y=\frac{5}{3}.x$

d) $y=\frac{3}{5}x$

e) $y=-\frac{3}{5}x$

19. (F. Carlos Chagas) Considere o triângulo $V_1(0,0)$, $V_2(a,a)$ e $V_3(a,-a)$. A equação da reta que passa pelo vértice V_3 e pelo ponto médio do lado V_1V_2.

a) $y=-\frac{1}{3}\cdot x+\frac{29}{3}$

b) $y=-3x+2a$

c) $y=x-1$

d) $y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{a}{2}$

e) $y=3x+2a$

20. (PUC) Dada a reta de equações paramétricas $\begin{cases} x=5+t \\ y=-2+t\sqrt{3} \end{cases}$, o seu coeficiente angular é:

a) $-5/2$

b) $5/\sqrt{13}$

c) $-2/\sqrt{5}$ $-\frac{2}{\sqrt{5}}$

d) $\sqrt{3}$

e) $1/\sqrt{3}$

21. (FUVEST) Um móvel descreve uma trajetória retilínea e suas coordenadas, em função do tempo t, são:

$$\begin{cases} x=3t+11 \\ y=-6t-21 \end{cases}$$

Determinar a equação segmentária da trajetória.

22. (FEI) A soma dos valores p e q, para os quais as retas $y=2x+p-2q$ e $y=\frac{3}{2}x+q-3$ são concorrentes no ponto $(1,2)$, é:

a) 7/2
b) -1/2
c) 21/2
d) 45
e) -2

23. (UERJ) Para calcular $\frac{3}{2}-\frac{12}{5}$, Paulo subtraiu os numeradores e dividiu por 10, obtendo:

$$\frac{3}{2}-\frac{12}{5}=\frac{3-12}{10}=-0,9 .$$

a) Determine de forma correta, o valor da expressão $\frac{3}{2}-\frac{12}{5}$.

b) Considerando que Paulo tenha calculado com base na fórmula $\frac{x}{2}-\frac{y}{5}=\frac{x-y}{10}$, onde x e y são números reais. Identifique o quadrante onde se encontra o ponto (x,y) e esboce o gráfico.

24. (UFF) Determine a área da região limitada do plano que está compreendida entre as retas $y=x$ e $y=0$ e é exterior ao círculo de centro em $(1,1)$ e raio 1.

25. (U.MARÍLIA) Dados os pontos $A(2,-2)$, $B(5,2)$ e $C(8,6)$, considere as afirmações abaixo.
I- **A**, **B** e **C** são colineares.
II- $-4x+3y+14=0$ é a equação geral da reta $\overleftrightarrow{AB}$.
III- **B** é o ponto médio de **AC.**

Dentre as alternativas abaixo, assinale a correta:

a) I, II e III são verdadeiros.
b) somente a I não é verdadeira.
c) somente a II é verdadeira.
d) somente a III é verdadeira.
e) I, II e III não são verdadeiras.

11. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS E DISTÂNCIA DE PONTO A RETA

CONTEXTO HISTÓRICO

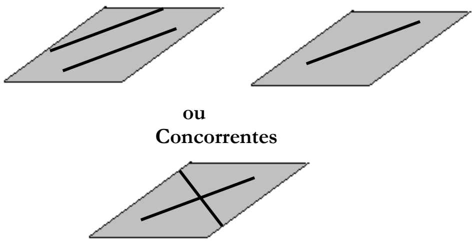
O INÍCIO DA GEOGRAFIA MODERNA

Os mapas-múndi criados pelo belga Gerardus Mercator (1512-1594) fundam a geografia moderna. Até hoje, muitos destes são desenhados de acordo com tal método, chamado Projeção de Mercator. Nesse tipo de mapa é mais fácil planejar as rotas de navegação, como a Terra é redonda, o percurso dos navios, ao ser traçado sobre os mapas comuns, aparece como uma curva. Mercator, então, altera a forma dos mapas de modo que, se um navio não mudar de direção, sua rota aparece como uma linha reta.

fonte: http://geocities.yahoo.com.br/vinicrashbr/ciencias/cronologia/tecnologia.htm

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS

Da geometria plana, sabemos que duas retas **r** e **s** (no plano) podem ser concorrentes, coincidentes ou paralelas. Vejamos o que podemos concluir com este estudo.



ESTUDO DAS POSIÇÕES RELATIVAS

Considere o sistema abaixo, formado pelas equações gerais de duas retas no plano cartesiano.

$$\begin{cases}(r)\, a_1x + b_1y + c = 0 \\ (s)\, a_2x + b_2y + c = 0\end{cases}$$

A posição relativa das retas **r** e **s** pode ser determinada se lembrarmos que para cada par $(x; y)$ de números reais, que é a solução do sistema, existe a representação no plano cartesiano de um ponto $P(x; y)$ comum às retas **r** e **s** e vice e versa.

Assim sendo, discutindo o sistema, teremos:

Se o sistema for possível determinado, então existe uma única solução, o que geometricamente representa que as retas serão concorrentes.

Se o sistema for possível indeterminado, então existem infinitas soluções, o que geometricamente representa que as retas serão coincidentes.

Se o sistema for impossível, então não existe solução, o que geometricamente representa que as retas serão paralelas distintas.

Exemplo:

Vamos determinar o ponto de intersecção das retas (r): $2x + y - 4 = 0$ e (s): $x - y + 1 = 0$. Montando o sistema:

$$\begin{cases}2x + y - 4 = 0 \\ x - y + 1 = 0\end{cases} \Rightarrow$$

Podemos estudá-lo:

$$\det\begin{vmatrix}2 & 1 \\ 1 & -1\end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$$

Como o determinante é diferente de zero, o sistema é possível determinado. Portanto existe uma única solução dada por:

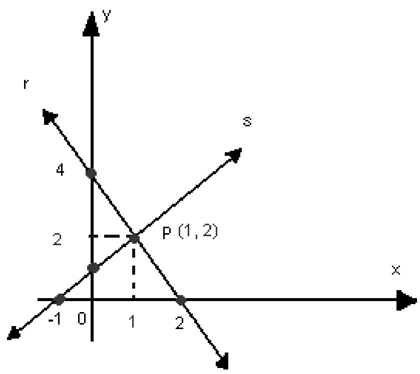
$$\begin{cases}2x + y = 4 \\ x - y = -1\end{cases} \Rightarrow$$

$$3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

Substituindo esse valor de x em $x - y = -1$, temos

$$1 - y = -1 \quad \rightarrow \quad y = 2$$

Essa solução representa, no plano cartesiano, o ponto $P(1, 2)$, graficamente temos:



RELAÇÕES ENTRE OS COEFICIENTES ANGULARES

Sejam as retas **r** e **s** (não verticais), cujas equações reduzidas são, respectivamente:

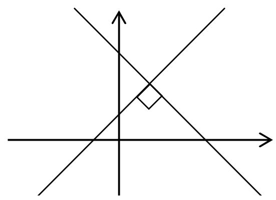
$$(r): y = m_r \cdot x + q_r$$
$$(s): y = m_s \cdot x + q_s$$

As posições relativas das retas **r** e **s** são as seguintes:

Retas concorrentes (caso particular importante: perpendiculares)

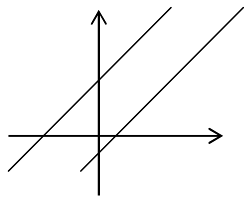
Quando as retas são concorrentes, seus coeficientes angulares são diferentes, ou seja:

$$m_r \neq m_s$$



Já no caso particular das retas perpendiculares, o coeficiente angular de uma é o oposto do inverso do coeficiente angular da outra. Veja:

$$m_r = \frac{-1}{m_s} \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$$



Exemplo:

Vejamos se as retas $(r): 3x - 2y + 1 = 0$ e $(s): 6x + 4y + 3 = 0$ são concorrentes:

$$\begin{cases} m_r = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2} \\ m_s = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Logo $m_r \neq m_s$ e, portanto, **r** e **s** são concorrentes.

Retas paralelas (distintas)

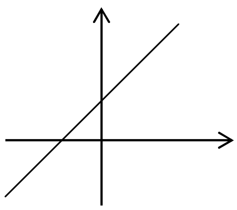
Quando as retas são <u>paralelas distintas</u>, seus coeficientes angulares são <u>iguais</u> e seus coeficientes lineares são <u>diferentes</u>, veja:

$$m_r = m_s \text{ e } q_r \neq q_s$$

Retas coincidentes

Quando as retas são <u>paralelas coincidentes</u>, seus coeficientes angulares são <u>iguais</u> e seus coeficientes lineares também são iguais.

$$m_r = m_s \text{ e } q_r = q_s$$



ÂNGULO ENTRE DUAS RETAS

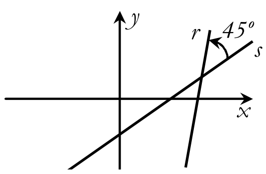
O ângulo entre duas retas pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$tg(\theta) = \pm\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}$$

tg$\theta > 0$, o ângulo θ é <u>agudo</u>.
tg$\theta < 0$, o ângulo θ é <u>obtuso.</u>

Exemplo:

Determine o coeficiente angular da reta **s**, da figuram sabendo que o coeficiente da reta **r** é 2/3.



Usando a convenção anti-horária para representação do ângulo entre duas retas, verificamos o ângulo $(45°)$, assinalado na figura de **r** para **s**, portanto a fórmula fica:

$$tg(\theta) = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \Rightarrow$$

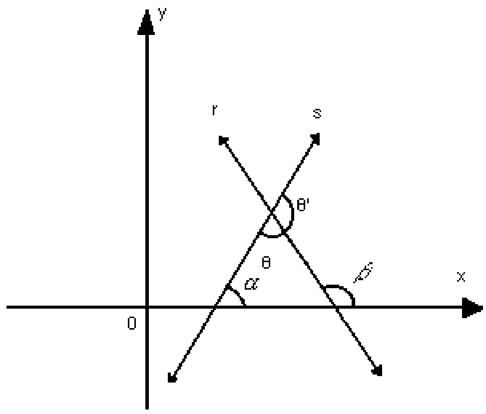
$$tg(45°) = \frac{\frac{2}{3} - m_s}{1 + \frac{2}{3} \cdot m_s} = \frac{\frac{2 - 3m_s}{3}}{\frac{3 + 2m_s}{3}} \Rightarrow$$

$$1 = \frac{2 - 3m_s}{3} \cdot \frac{3}{3 + 2m_s} \Rightarrow 3 + 2m_s = 2 - 3m_s$$

Logo $m_s = -\frac{1}{5}$.

Demonstração:

Sendo **r** e **s** duas retas não-verticais e não-perpendiculares entre si, pelo teorema do ângulo externo $(\beta = \alpha + \theta)$, temos:



$$\theta \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = \theta + \alpha \Rightarrow \theta = \beta - \alpha \Rightarrow$$

$$tg(\theta) = tg(\beta - \alpha) \Rightarrow$$

$$tg(\theta) = \frac{tg(\beta) - tg(\alpha)}{1 + tg(\beta)tg(\alpha)}$$

Como $\theta \leq \frac{\pi}{2}$, $tg(\beta) = m_r$ e $tg(\alpha) = m_s$, temos:

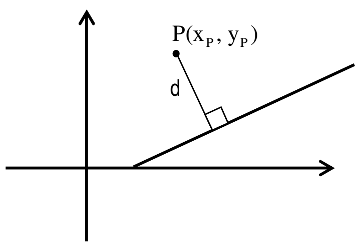
$$tg(\theta) = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}$$

Dependendo da posição das duas retas no plano, o ângulo θ pode ser agudo ou obtuso. Logo:

$$tg(\theta) = \pm\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}$$

DISTÂNCIA DE PONTO À RETA

A distância entre o ponto $P(x; y)$ e a reta (r) ax + by + c = 0 é dada pela seguinte expressão:



$$d_{\mathrm{Pr}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemplo:

Vamos calcular a distância do ponto P(-1,2) à reta r: x - 2y + 1 = 0 .
Temos P(x, y)=P(-1, 2) , a = 1, b= - 2 e c=1 . Assim:

$$d_{\mathrm{Pr}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{\mathrm{Pr}} = \frac{|1 \cdot (-1) + (-2)2 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

Logo:

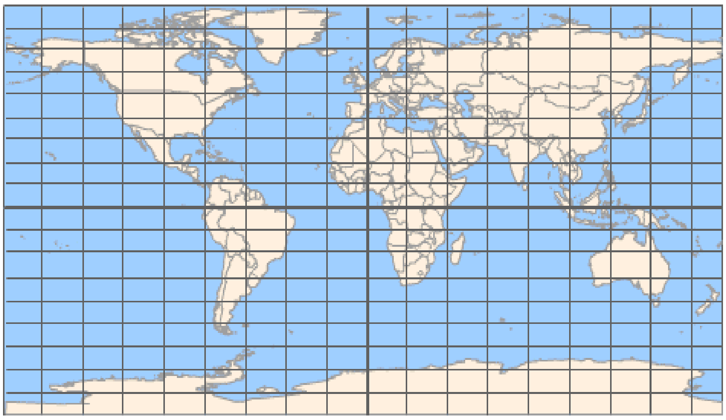
$$d_{\mathrm{Pr}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

CURIOSIDADE

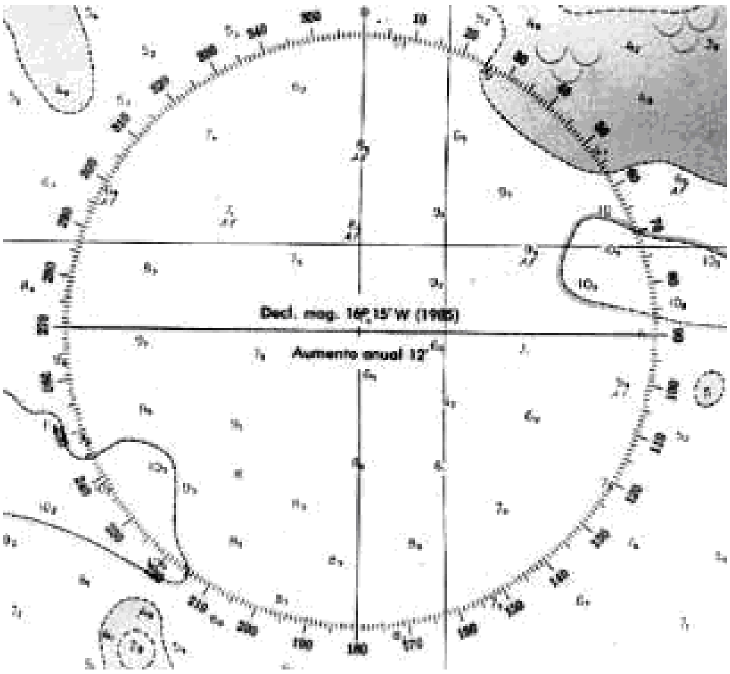
Algumas aplicações da Geometria Analítica

O globo terrestre foi dividido em paralelos e meridianos.

Qualquer ponto do globo pode ser identificado por um par de coordenadas.



E o rumo de um navio pode ser identificado por um ângulo. Com isso, pode-se usar várias regras de geometria analítica para facilitar a navegação.



Para colocar o submarino à distância correta da rota do navio, deve-se estabelecer a distância entre a reta que descreve a rota do navio e o ponto em que o submarino se encontra.

Para colocar o submarino na rota paralela, deve-se calcular uma equação de reta que descreva uma reta paralela à encontrada para a rota do navio. E o rumo de um navio pode ser identificado por um ângulo. Com isso, podem-se usar várias regras de geometria analítica para facilitar a navegação.

fonte: http://www.educacional.com.br

Exercícios

1. Obtenha o ponto de intersecção entre as retas $(r): 2x + 5y - 9 = 0$ e $(s): y = -2x - 3$.
a) (-3, 3)
b) (2, -2)
c) (5, 22)
d) (1, 2)
e) (3, 4)

2. Obtenha o ponto de intersecção entre as retas $(r): y = 2x - 6$ e $(s): y = 3x + 2$.
a) (-8, -22)
b) (1, 2)
c) (4, -10)
d) (5, 6)
e) (-4, 12)

3. As retas da equação $x - 3y - 2 = 0$ e $y = x - 2k$ interceptam-se no ponto $(k+1,\ k-1)$ determine o valor de k e o ponto de intersecção entre as duas retas, respectivamente.
a) 1 *e* (2, 0)
b) 2 *e* (1, 0)
c) 5 *e* (2, 0)
d) 1 *e* (0, 2)
e) 2 *e* (1, 2)

4. Obtenha a equação da reta que passa por P e tem coeficiente a.
a) P(2, 3); a = 2

b) $P(-2, 1);\ a = -2$

c) $P(4, 0);\ a = -\frac{1}{2}$

5. Escreva a equação fundamental da reta que passa pelo ponto **P** e tem inclinação α .
a) $P(2,\ 8)$ e $\alpha = 45°$

b) $P(-4,\ 6)$ e $\alpha = 30°$

c) $P(3,\ -1)$ e $\alpha = 120°$

6. Determine o valor de "m" para que as retas $2x + 3y - 1 = 0$ e $mx + 4y - 3 = 0$ sejam paralelas.
a) 1
b) 2
c) $\dfrac{8}{3}$
d) – 6
e) 5

7. Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $P(3,\ -3)$ e é paralela à reta $2x - 3y - 6 = 0$.
a) $2x - y + 9 = 0$
b) $2x - 3y - 15 = 0$
c) $3x + 2y - 15 = 0$
d) $x - 2y + 9 = 0$
e) $3x - 2y + 15 = 0$

8. Determine a equação da reta que passa pelo ponto $A(3,\ 2)$ e é paralela à reta $4x - y + 1 = 0$.
a) $y = 2x - 3$
b) $y = 4x - 10$
c) $y = -x + 15$
d) $y = x + 5$
e) $y = -4x + 5$

9. Determine o valor de "k" para que as retas $3x - 5y + 10 = 0$ e $kx + 3y - 21 = 0$ sejam perpendiculares.
a) 1
b) 6
c) –10
d) 15
e) 5

10. Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $P(1,\ 5)$ e é perpendicular à reta de equação $x + 3y - 12 = 0$.
a) y = -2x – 1
b) y = x + 4
c) y = 3x + 2
d) y = -x + 5
e) y = - x – 12

11.. Obtenha a equação da mediatriz do segmento de reta AB, sendo $A(3,\ 2)$ e $B(7,\ 4)$.
a) $y = -2x + 13$
b) $y = 2x - 13$
c) $y = x + 1$
d) $y = 13x + 2$
e) $y = x - 4$

12. (F.Carlos Chagas) O menor ângulo formado pelas retas cujos coeficientes angulares são m e $\dfrac{m-1}{m+1}$, mede:
a) $\dfrac{\pi}{3}$
b) $\dfrac{\pi}{2}$
c) $\dfrac{\pi}{4}$
d) $\dfrac{\pi}{6}$
e) $\dfrac{3\pi}{4}$

13. (FUVEST) Entre os pontos da reta de equação $x + 3y - 8 = 0$, existe um ponto **Q,** cuja a distância ao ponto $P(1;2)$ é mínima. As coordenadas do ponto **Q** são:
a) $\left(\dfrac{11}{10};\dfrac{23}{10}\right)$
b) $(2;2)$
c) $(8;0)$
d) $\left(\dfrac{11}{5};\dfrac{23}{5}\right)$
e) $\left(2;\dfrac{13}{10}\right)$

14. Calcule a distância do ponto $P(2,\ 6)$ à reta $3x - 4y - 2 = 0$.
a) 32
b) 10
c) 8
d) 4
e) 2

15. (FUVEST) Dados os pontos $P(3;2)$ e a reta $(r): x - y + 1 = 0$, determinar as coordenadas da projeção ortogonal de **P** sobre a reta **r**.

12. ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA

CONTEXTO HISTÓRICO

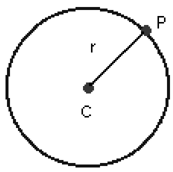
INVENÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL (1669)

O físico inglês Isaac Newton (1642-1727) inventou os cálculo diferencial e integral e com eles torna-se possível calcular a área ou o volume de qualquer figura geométrica, não importando a sua forma. Até então, para cada figura era preciso criar uma fórmula diferente.

REVOLUÇÃO MATEMÁTICA – O cálculo diferencial e integral, que Newton desenvolveu ao mesmo tempo que o alemão Wilheim Leibniz (1646-1716), revoluciona a matemática. Para saber a área de um círculo, utilizando a nova ferramenta, basta dividir esse círculo em quadrados iguais, bem pequenos; em seguida, calcula-se a área de um quadrado e multiplica-se pelo número total de quadrados. Com isso, acha-se a área (ou o volume, se for o caso, de qualquer figura). Os quadrados têm de ser infinitamente pequenos para encher toda a borda do círculo e o número de quadrados precisa ser infinito. Portanto, a área total será uma soma de infinitos termos, tipo de soma que os gregos já sabiam fazer havia mais de 2 mil anos.

DEFINIÇÃO

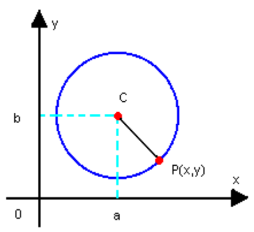
Dado um ponto **C** (centro) de um plano e uma medida **r** não nula (raio), chama-se circunferência o conjunto dos pontos do plano equidistantes do ponto **C.**



EQUAÇÕES DA CIRCUNFERÊNCIA

EQUAÇÃO REDUZIDA

Seja a circunferência de centro $C(a,\ b)$ e raio **r**, sendo $P(x,\ y)$ um ponto qualquer da circunferência, a distância de **C** a **P** $\left(d_{CP}\right)$ é o raio dessa circunferência. Então:



A equação reduzida da circunferência é dada por:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Particularidade: se $C\left(0;0\right)$, então a equação reduzida será:

$$r^2=x^2+y^2$$

Exemplo:

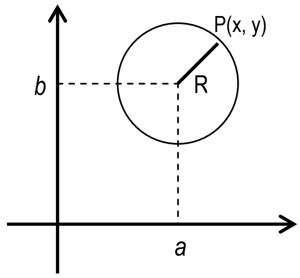
Qual a equação reduzida da reta de centro **C**(2, -3) e raio r = 4?

De acordo com a fórmula da equação geral $r^2=(x-a)^2+(y-b)^2$, temos:

$$(x-2)^2+(y+3)^2=16$$

DETERMINAÇÃO DA EQUAÇÃO REDUZIDA

Seja a circunferência de centro $C(a,\ b)$ e raio **r**, sendo $P(x,\ y)$ um ponto qualquer desta circunferência, a distância de **C** a **P** $\left(d_{CP}\right)$ é o raio da circunferência.



A distância d_{CP} do centro **C** até o ponto **P** é dada por:

$$d_{CP}=\sqrt{\left(x_C-x_P\right)^2+\left(y_C-y_P\right)^2}$$

Deste modo, substituindo os valores das coordenadas do ponto **P** ao centro **C**, temos:

$$d_{CP}=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r\Rightarrow$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

EQUAÇÃO GERAL

A <u>equação geral</u> da reta é dada pela seguinte expressão:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

Particularidade: se $C(0{,}0)$ for o centro da circunferência, a equação geral será:

$$x^2+y^2-r^2=0$$

Exemplo:

Dada a equação reduzida do exemplo anterior $(x-2)^2+(y+3)^2=16$, desenvolvendo os quadrados obtemos:

$$x^2+y^2+4x-6y+(-2)^2+3^2-4^2=0$$

DETERMINAÇÃO DO CENTRO E DO RAIO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

Dada a equação geral de uma circunferência utilizamos o processo de fatoração de trinômio quadrado perfeito para transformá-la na equação reduzida e, assim, determinamos o centro e o raio da circunferência.

Para tanto, a equação geral deve obedecer a duas condições:

os coeficientes dos termos x^2 e y^2 devem ser iguais a 1;

não deve existir o termo xy.

Exemplo:

Determine o centro e o raio da circunferência cuja equação geral é $x^2+y^2-6x+2y-6=0$.

Observando a equação, vemos que ela obedece às duas condições. Assim:

1º passo: agrupamos os termos em **x** e os termos em **y** e isolamos o termo independente

$$x^2 - 6x + \_ + y^2 + 2y + \_ = 6$$

2º passo: determinamos os termos que completam os quadrados perfeitos nas variáveis **x** e **y**, somando a ambos os membros as parcelas correspondentes:

x2 - 6x + 9 + y2 + 2y + 1 = 6 + 9 + 1

x 2x 3 y 2y . 1

• **3º passo:** fatorando os trinômios quadrados perfeitos

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$$

• **4º passo:** obtida a equação reduzida, determinamos o centro e o raio

$$\left.\begin{matrix} a = 3 \\ b = -1 \end{matrix}\right\} C(3;-1) \qquad r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$$

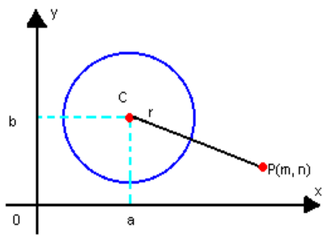
POSIÇÃO DE UM PONTO EM RELAÇÃO A UMA CIRCUNFERÊNCIA

Considerando uma circunferência de equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, um ponto **P** de coordenadas $(m;\ n)$ pode ocupar as seguintes posições:

P é exterior à circunferência;
P pertence à circunferência;
P é interior à circunferência.

Vejamos o que acontece em cada caso:

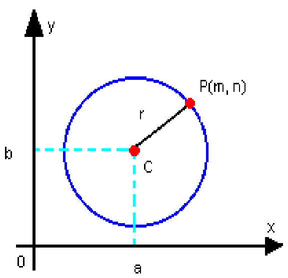
I - **P** é exterior à circunferência $(d_{PC} > r)$



Temos que,

$$CP > r \Rightarrow \sqrt{(x_p - x_c)^2 + (y_p - y_c)^2} > r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(m-a)^2 + (n-b)^2} > r \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (m-a)^2 + (n-b)^2 - r^2 > 0$$

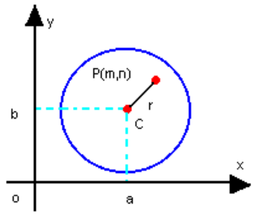
II - **P** pertence à circunferência $(d_{PC} = r)$



Temos que,

$$CP = r \Rightarrow (m-a)^2 + (n-b)^2 = r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m-a)^2 + (n-b)^2 - r^2 = 0$$

III - **P** é interior à circunferência $(d_{PC} < r)$

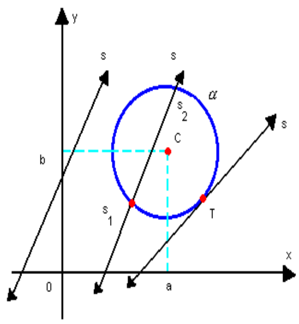


Temos que,

$$CP < r \Rightarrow (m-a)^2 + (n-b)^2 < r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m-a)^2 + (n-b)^2 - r^2 < 0$$

POSIÇÃO DE UMA RETA EM RELAÇÃO A UMA CIRCUNFERÊNCIA

Dadas uma reta $s:\ ax + bx + c = 0$ e uma circunferência a de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, vamos examinar as posições relativas entre **s** e α:



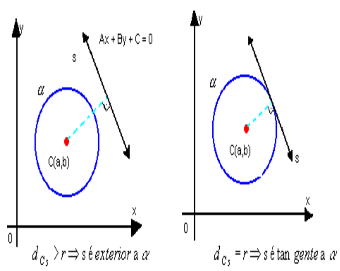
s pode ser:

exterior à circunferência
secante à circunferência
tangente à circunferência

DETERMINAÇÃO DAS POSIÇÕES RELATIVAS

Podemos determinar a posição de uma reta em relação a uma circunferência calculando a distância da reta ao centro da circunferência. Assim, dadas a reta $s:\ ax + by + c = 0$ e a circunferência $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, em cada caso, temos

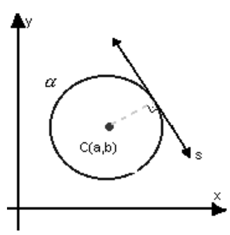
1º Caso: <u>reta exterior</u> à circunferência $(d_{Cr} > r)$



Logo:

$$d_{Pr} > \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

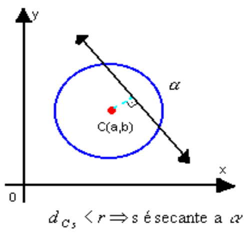
2º Caso: <u>reta tangente</u> à circunferência $(d_{Cr} = r)$



Logo:

$$d_{Pr} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

3º Caso: reta secante à circunferência $\left(d_{Cr} < r\right)$



Logo:

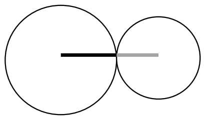
$$d_{\mathrm{Pr}} < \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Posições Relativas entre duas Circunferências

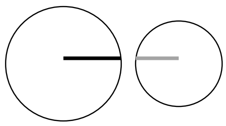
Dadas duas circunferências, uma de centro C_1 e raio R_1 e a outra de centro C_2 e raio R_2, compararemos o seguimento de reta C_1C_2 e $R_1 + R_2$.

Existem seis possibilidades:

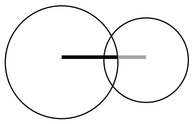
1º) Se $d_{C_1C_2} = R_1 + R_2$, então as circunferências são **tangentes externamente** (1 ponto de interseção).



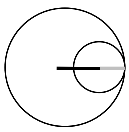
2º) Se $d_{C_1C_2} > R_1 + R_2$, então as circunferências são **externas** (não existe ponto de interseção).



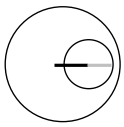
3º) Se $d_{C_1C_2} < R_1 + R_2$ e $d_{C_1C_2} > R_1 - R_2$, então as circunferências são **secantes** (2 pontos de interseção).



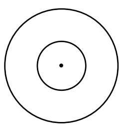
4º) Se $d_{C_1C_2} = R_1 - R_2$, então as circunferências são **tangentes internamente** (1 ponto de interseção).



5º) Se $d_{C_1C_2} < R_1 - R_2$ e $d_{C_1C_2} \neq 0$, então a circunferência C_2 é **interna** à C_1 (não possuem pontos de interseção)



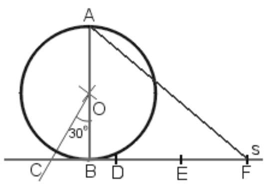
6º) Se $d_{C_1C_2} = 0$, então as circunferências são concêntricas.



CURIOSIDADE

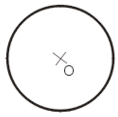
Retificação da Circunferência Utilizando Régua e Compasso

Retificar uma circunferência é determinar um segmento cujo comprimento seja o comprimento da circunferência.

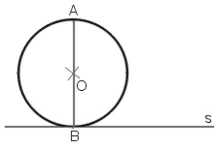


Vejamos passo a passo:

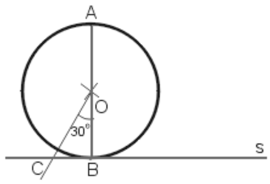
1) Seja a circunferência (O;r)



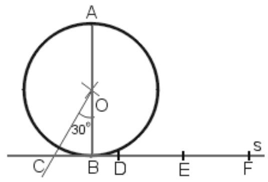
2) Traçar o diâmetro AB e uma reta s perpendicular a ele passando por B;



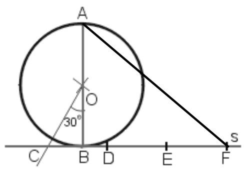
3) Construir um ângulo de 30º com vértice no centro da circunferência, prolongando seu lado até encontrar a reta s no ponto C;



4) A partir de C marcar 3 pontos D, E, F, sendo CD = DE = EF = raio;



5) O segmento de reta AF é a retificação do semicírculo.
(2 x AF = Circunferência retificada)



fonte: http://www.pro.ufjf.br/desgeo/circunferencia/teoria/Circunfer.htm

Exercícios

1. Determine a equação reduzida da circunferência de centro C e raio R.

a) $\begin{cases} C(3,5) \\ R = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} C(0,0) \\ R = \sqrt{7} \end{cases}$

c) $\begin{cases} C(0,4) \\ R = 9 \end{cases}$

2. Escreva a equação reduzida da circunferência de raio 12 e concêntrica com a circunferência $(x-2)^2 + (y + 3)^2 = 64$. Qual é a área da coroa circular determinada por essas duas circunferências?

3. Determine a equação geral da circunferência de centro C(3, 5) e raio R igual 4.
a) $x^2 + y^2 + 10x + 6y - 18 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 2x + 8y - 1 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 18 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 4 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 27 = 0$

4. Determine o centro e o raio da circunferência $x^2 + y^2 - 10x + 4y - 20 = 0$, respectivamente:
a) (-2,5) e 7
b) (5,2) e 5
c) (2,2) e 2
d) (3,4) e 1
e) (5,-2) e 7

5. Calcule a área de um quadrado inscrito na circunferência

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$$

a) 2u.a.
b) 4u.a.
c) 8u.a.
d) 16u.a.
e) 32u.a.

6. Determine o valor de k para que a equação $x^2 + y^2 + 4x - 2y + k = 0$ represente uma circunferência:
a) $k > 5$
b) $k < 5$
c) $k > 10$
d) $k < 15$
e) $k = 20$

7. Escreva a equação da circunferência de centro C(3,5) e tangente à reta (r) $5x + 12y - 10 = 0$
a) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 12x + 38y - 1 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 8x + 15y + 1 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 2x - 11y - 8 = 0$

8. Determine a posição do ponto P(53) em relação a circunferência

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$$

a) externo
b) interno
c) pertence
d) centro
e) n.d.a.

9. Determine a posição relativa da reta $x - y + 1 = 0$ em relação ao círculo

$$x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0 \ :$$

a) secante
b) tangente
c) externa
d) n.d.a.

10. Qual a posição relativa entre as circunferências

(λ) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$ e (δ) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$.

a) tangente
b) secante
c) externas
d) coincidentes
e) n.d.a.

11. (FUVEST) O centro da circunferência que passa pelos pontos $(4;6)$, $(-6;4)$ e pertence à reta $3x + y - 12 = 0$ é:
a) $(6;-2)$
b) $(-6;30)$
c) $(0;1)$
d) $(6;12)$
e) $(-6;1)$

12. (FEI) A equação $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$ representa uma circunferência de centro e raio, respectivamente, iguais a:
a) $(3;3)$ e $\sqrt{18}$
b) $(3;3)$ e 4
c) $(3;3)$ e $\sqrt{14}$
d) $(3;3)$ e 2
e) $(3;3)$ e $\sqrt{22}$

13. (FUVEST) As circunferências:
I- $x^2 + y^2 - 2y = 0$ e
II- $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$, são:
a) externas.
b) tangentes externamente.
c) tangentes internamente.
d) secantes.
e) I é interna a II.

14. (FUVEST) Sendo **C** a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ e **s** a reta $x + y = 8$:
a) Determine uma equação da reta perpendicular a **s** e que passa pelo centro de **C**.

b) Dentre os pontos equidistantes de **C** e **s,** determine aquele que está mais próximo de **s**.

FRENTE TRÊS

1. CONJUNTOS NUMÉRICOS

NÚMEROS NATURAIS

O conjunto dos números naturais é representado por N:

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

$N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

NÚMEROS INTEIROS

O conjunto dos números inteiros é representado por Z.

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

$\mathbb{Z}^* = \{..., -3 -2, -1, 1, 2, 3,...\}$

$\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2, -1, 0\}$

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

NÚMEROS RACIONAIS

O conjunto dos números racionais é representado por Θ. Todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros e $b \neq 0$, ou seja:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Logo abaixo temos um subconjunto de Θ, veja:

$$\mathbb{Q} = \left\{ ..., -3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{14}{9}, -1, 0, \frac{1}{3}, 1, 2, \frac{19}{9}, ... \right\}$$

NÚMEROS IRRACIONAIS

O conjunto dos números irracionais é representado por I, mas também pode ser representado por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Os números irracionais são os números com dízimas não-periódicas, como por exemplo:

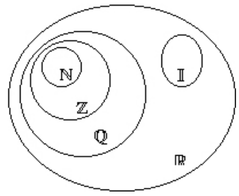
$$\sqrt{2} = 1,41421356237... \qquad \pi = 3,14159265358979...$$

$$\sqrt{5} = 2,236067977499789...$$

NÚMEROS REAIS

O conjunto dos números reais é composto pela união dos conjuntos dos números racionais e irracionais.

Podemos agora observar, a seguir, a ilustração dos conjuntos:



EXERCÍCIOS

1. Mostre que as dízimas periódicas abaixo são números racionais, escrevendo-os em forma de fração.

a) $0,\overline{3} =$

Observação: $0,\overline{3} = 0,33333...$, ou seja, os algarismos que estiverem sob a barra se repetem infinitamente (períodos).

Resolução:

Primeiro igualamos a dízima a x::

$$x = 0,33333...$$

Depois multiplicamos os dois membros por 10 (neste caso):

$$10x = 3,33333...$$
$$10x = 3 + 0,33333...'$$

como $x = 0,33333...$, podemos substituir na equação:

$$10x = 3 + x$$
$$10x - x = 3$$
$$9x = 3$$
$$x = \frac{3}{9}$$
$$x = \frac{1}{3}$$

Regra prática

A regra geral para expressar as dízimas periódicas em forma de fração, obtida a partir da demonstração anterior, é a seguinte:

Caso 1: dízima periódica sem parte inteira

$$\text{Ex: } 0,\overline{52} = \frac{52}{99}$$

No exemplo acima, o período (52) é formado por dois algarismos. Dividimos então este período por um número formado apenas por 9, também de dois algarismos.

Caso 2: dízima periódica com parte inteira:

$$\text{Ex: } 6,\overline{7} = 6 + 0,\overline{7} = 6 + \frac{7}{9} = \frac{61}{9}$$

No exemplo acima, basta "separarmos" a parte inteira da dízima. Escrevemos a dízima periódica em forma de fração e efetuamos a soma.

b) $0,\overline{7} =$

c) $0,\overline{12} =$

d) $0,\overline{277} =$

e) $5,\overline{8} =$

f) $3,\overline{51} =$

2. Podemos dizer que $0,\overline{51}$ é igual a:

a) $\frac{5}{9}$ b) $\frac{204}{400}$ c $\frac{51}{99}$ d) $\frac{153}{300}$

e) $\frac{51}{9}$

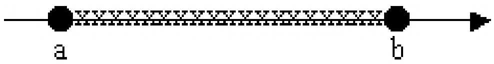
3. (FUVEST) Quaisquer que sejam o racional x e o irracional y, pode-se dizer que:

a) xy é irracional.
b) xy é racional.
c) y^2 é irracional.
d) $x + y$ é racional.
e) $x + y$ é irracional.

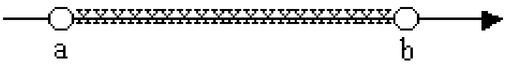
INTERVALOS

Sendo a e b, $a < b$, números reais, definiremos os seguintes conjuntos chamados de intervalos:

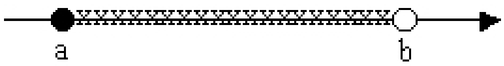
a) $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$



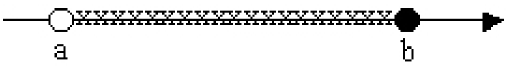
b) $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



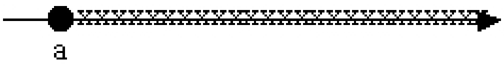
c) $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$



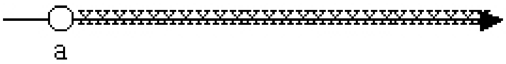
d) $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$



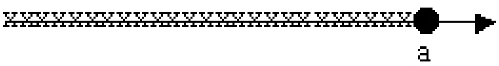
e) $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$



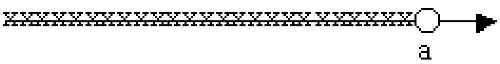
f) $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$



g) $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \ge x\}$



h) $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid a > x\}$



EXERCÍCIOS

4. Dados $A = [1,5]$ e $B =]3,7[$, obter

a) $A \cup B$
b) $A \cap B$

5. (FUVEST) Se $-4 < x < -1$ e $1 < y < 2$ então xy e $\frac{2}{x}$ estão no intervalo:

a) $]-8, \ -1[$
b) $\left]-2, \ -\frac{1}{2}\right[$
c) $]-2, \ -1[$
d) $\left]-8, \ -\frac{1}{2}\right[$
e) $\left]-1, \ -\frac{1}{2}\right[$

6. (FUVEST) Os números x e y são tais que $5 \le x \le 10$ e $20 \le y \le 30$.`O maior valor possível de $\frac{x}{y}$ é

a) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{2}$
e) 1

7. (FUVEST) Dados dois números reais a e b que satisfazem as desigualdades $1 \le a \le 2$ e $3 \le b \le 5$, pode-se afirmar que

a) $\frac{a}{b} \le \frac{2}{5}$
b) $\frac{a}{b} \ge \frac{2}{3}$
c) $\frac{1}{5} \le \frac{a}{b} \le \frac{2}{3}$
d) $\frac{1}{5} \le \frac{a}{b} \le \frac{1}{2}$
e) $\frac{3}{2} \le \frac{a}{b} \le 5$

2. CONCEITOS PRIMITIVOS DA GEOMETRIA

CONTEXTO HISTÓRICO – EUCLIDES

"Pouco se sabe com certeza da vida de Euclides, mas é provável que sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas. Desconhece-se a data de seu nascimento, mas calcula-se que tenha vivido por volta de 300 a.C..

Nesse tempo, o sábio Ptolomeu, sucedia a Alexandre Magno no trono do Egito. Sob seus cuidados, surgiu em Alexandria uma instituição, denominada "Museu", que congregava a maioria dos sábios da época. O Museu foi erigido ao lado do palácio real, tinha dependências residenciais, salas de aula e de conferências e, o que é mais importante, a maior biblioteca da época.

Euclides foi o primeiro diretor do Museu e, graças a isso, pode organizar os resultados obtidos por matemáticos anteriores (Tales, Pitágoras e outros que estudaremos posteriormente, em nosso curso). Tal organização se acha em sua imortal obra, modestamente intitulada de "Os Elementos".

"Os Elementos" são um conjunto de 13 livros dedicados ao fundamento e desenvolvimento lógico e sistemático da geometria.

O primeiro livro trata das questões que são fundamentais para a geometria e o seu estilo, sua ordenação, serviram de normas diretoras para todas as outras obras posteriores da matemática. Os princípios dos quais parte Euclides para edificar a geometria são as definições, os postulados e os entes primitivos.

As definições são, no início, em número de 23 e ao todo atingem 120. Por exemplo, no primeiro livro, encontramos as seguintes definições: "Ponto é aquilo que não tem partes", "Reta é o comprimento sem espessura", "Superfície é o que tem unicamente comprimento e largura", "Retas paralelas são aquela que, estando em um mesmo plano, não se encontram ao serem prolongadas indefinidamente".

Essas definições, agora nos parecem um tanto ingênuas e despidas de rigor lógico, mas tenhamos em conta a época em que foram escritas e o pioneirismo de Euclides. Adotando em seguida 10 postulados, Euclides deduz seus teoremas. A partir do dia do seu aparecimento, "Os Elementos" se tornaram uma obra clássica da Geometria e de tal modo foi difundida que chegou a sobrepujar o seu autor a ponto de, na Idade Média, se negar a existência física de Euclides."

Texto de:

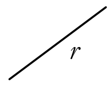
INTRODUÇÃO

Adotaremos sem definir as noções de ponto, reta e plano, pois de cada um desses decorre um conhecimento intuitivo da experiência e observação.

Na matemática, costumamos usar notações específicas para representar as "coisas", deste modo, ponto geralmente é representado por letras maiúsculas latinas do tipo A, B, C; retas são representadas por letras minúsculas latinas a, b, c...; e, por fim, o plano é representado por letras gregas minúsculas α, β, γ... Temos também a notação gráfica que vocês já estão cansados de ver (ou pelo menos deveriam estar).

Ponto:

Reta:



Plano:

DEFINIÇÕES PRIMITIVAS:

Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.

Num plano há infinitos pontos.

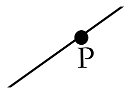
Dados dois pontos A e B, de duas uma:

$$A = B \text{ ou } A \neq B$$

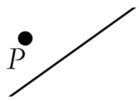
(o símbolo $\neq$ significa \`diferente de´)

Dados um ponto P e uma reta r, de duas uma:

Ou $P \in r$ (o símbolo $\in$ significa "pertence a")

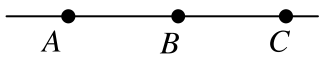


Ou $P \notin r$ (o símbolo $\notin$ significa "não pertence a")



Pontos colineares:

Pontos colineares são pontos que pertencem a uma mesma reta, veja:



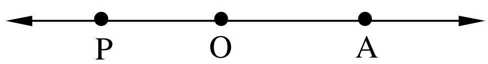
Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.

Três pontos colineares determinam um único plano que passa por eles.

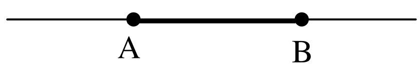
Se uma reta tem dois pontos distintos num mesmo plano, então a reta está contida no plano.

Um ponto de uma reta a separa em duas semi–retas.

Exemplo:



Dados dois pontos quaisquer A e B e uma reta r que passa por eles, definimos como sendo segmento de reta $\overline{AB}$ a porção da reta entre eles.



MAIS ALGUMAS DEFINIÇÕES:

Pontos coplanares são pontos que pertencem a um mesmo plano.

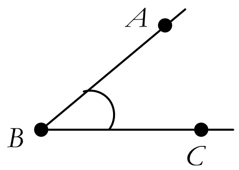
Figura é qualquer conjunto de pontos.

Figura plana é uma figura que tem todos seus pontos num mesmo plano.

A geometria plana estuda as figuras planas.

ÂNGULO:

Ângulo é a união de duas semi-retas de mesma origem e não–colineares. Veja:



Na figura acima, denomina – se:

B → vértice.
BA e BC → lados.

Ângulos complementares:

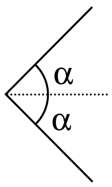
Dois ângulos cuja soma das medidas é 90º, são chamados ângulos complementares.

Ângulos Suplementares:

Dois ângulos cuja soma das medidas é 180º, são chamados de ângulos suplementares.

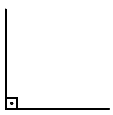
Bissetriz de um ângulo:

Bissetriz de um ângulo é a semi–reta entre os lados de um ângulo que determina, com esses lados, dois ângulos consecutivos congruentes. Em outras palavras, "é a semi–reta que divide o ângulo ao meio".
Observação: a bissetriz de um ângulo é única.



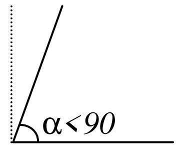
Ângulo Reto:

Ângulo reto é todo ângulo congruente aos seus ângulos adjacentes, em outras palavras, "ângulo reto é aquele que mede 90º ".



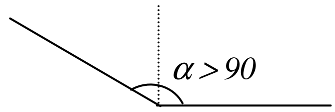
Ângulo Agudo:

Ângulo agudo é um ângulo menor que o reto ($\alpha < 90º$).



Ângulo Obtuso:

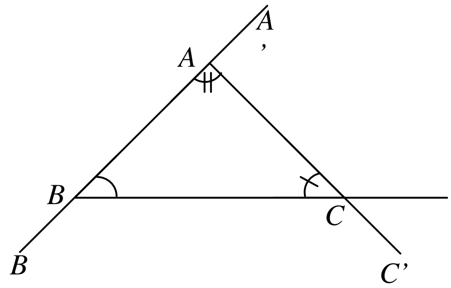
Ângulo obtuso é um ângulo maior que um ângulo reto ($\alpha >$ 90º).



TRIÂNGULOS:

Definição:

Se *A, B* e *C* são três pontos não – colineares, a reunião dos segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{BC}$ é chamada de triângulo e representada por ΔABC.



Ainda com relação aos triângulos, devemos definir seus elementos:

$$\begin{cases} A, B, C \text{ vértices} \\ \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC} \text{ lados} \\ B\hat{A}C, A\hat{B}C, A\hat{C}B \text{ ângulos internos} \\ A'\hat{A}C, B'\hat{B}C, C'\hat{C}B \text{ ângulos externos} \end{cases}$$

Observemos ainda que:

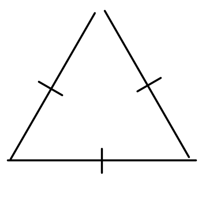
A e BÂC, são opostos ao lado BC.
B e A$\hat{B}$C são opostos ao lado AC.
C e A$\hat{C}$B são opostos ao lado AB.

CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS

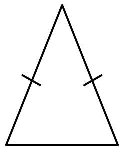
Quanto aos lados:

Podemos classificar os triângulos quanto aos lados da seguinte maneira:

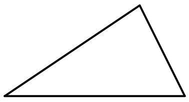
Equilátero: quando tem os três lados congruentes.



Isósceles: quando tem dois lados congruentes.

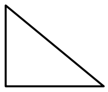


Escaleno: quando não tem nenhum par de lados congruentes.

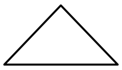


Quanto aos Ângulos:

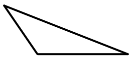
Triângulo Retângulo: que tem um ângulo reto.



Triângulo Acutângulo: se tem os três ângulos agudos.



Triângulo Obtusângulo: se tem um ângulo obtuso.

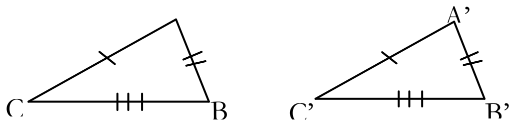


Duas observações devem ser feitas em relação aos ângulos dos triângulos:
1) Em todo triângulo equilátero os ângulos internos são iguais.
2) Em todo triângulo isósceles os ângulos opostos aos lados congruentes, são também congruentes.

TRIÂNGULOS CONGRUENTES

Definição:

O triângulo ΔABC só é congruente ao $\Delta A'B'C'$ ($\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, simbolicamente), se for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices, de modo a satisfazer as seguintes condições:
a) os lados correspondentes são congruentes.
b) os ângulos correspondentes são congruentes.



CASOS DE CONGRUÊNCIA:

1º caso(LAL): lado-ângulo-lado

Se dois triângulos tem dois lados e o ângulo por eles determinados congruentes aos seus correspondentes, então, eles são congruentes.

2º caso (ALA): ângulo-lado-ângulo

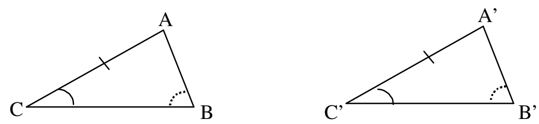
Se dois triângulos tem dois ângulos e o lado adjacente a eles congruentes aos seus correspondentes, então, eles são congruentes.

3º caso (LLL): lado-lado-lado

Se dois triângulos tem os três lados congruentes aos seus correspondentes, então, eles são congruentes.

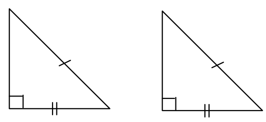
4º caso(LAA_0): lado - ângulo - ângulo oposto

Se dois triângulos tem um lado, um ângulo e o ângulo oposto ao lado congruentes, então, eles são congruentes.



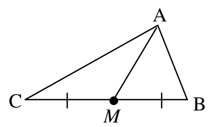
Caso especial (HC): hipotenusa – cateto

Se dois triângulos retângulos têm a hipotenusa e um cateto congruentes aos seus correspondentes, então, eles são congruentes.

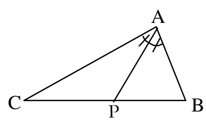


SEGMENTOS NOTÁVEIS

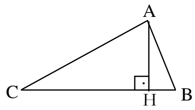
A Mediana de um triângulo é um segmento de reta que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto (como mostra a figura abaixo).



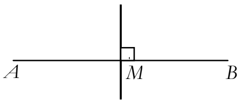
A Bissetriz Interna de um triângulo é o segmento da bissetriz de um ângulo do triângulo que liga um vértice a um ponto do lado oposto (como mostra a figura abaixo).



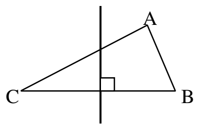
A Altura de um triângulo é o segmento que liga um vértice a um ponto da reta suporte ao lado oposto e é perpendicular a esse lado (como mostra a figura abaixo).



A Mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a esse segmento pelo seu ponto médio (como mostra a figura abaixo).



A Mediatriz de um triângulo é uma reta no plano do triângulo que é mediatriz de um dos lados desse triângulo (como mostra a figura abaixo).



CURIOSIDADES

A HISTÓRIA DO GRAU

"Sempre encontramos afirmações de que o ângulo reto mede 90º e que o ângulo raso mede 180º. Mas qual é a razão para os valores serem justamente 90 e 180?

Para entendermos isso, retornaremos ao ano de 4000 a.C., quando egípcios e árabes estavam tentando elaborar um calendário. Nessa época, acreditava-se que o Sol girava em torno da Terra numa órbita que levava 360 dias para completar uma volta. Desse modo, a cada dia o Sol percorria uma parcela dessa órbita, ou seja, um arco da circunferência de sua órbita. A esse arco fez-se corresponder um ângulo cujo vértice era o centro da Terra e cujos lados passavam pelas extremidades de tal arco. Assim, esse ângulo passou a ser uma unidade de medida e foi chamado de grau ou ângulo de um grau.

Pode-se concluir, então, que para os antigos egípcios e árabes o grau era a medida do arco que o Sol percorria em torno da Terra durante um dia.

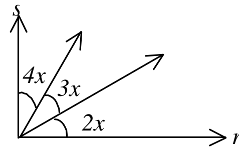
Hoje, sabemos que é a Terra que gira em torno do Sol, mas, contudo, manteve-se a tradição e convencionou-se dizer que o arco de circunferência mede um grau quando corresponde a 1/360 dessa circunferência."

EXERCÍCIOS

1. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

( ) por um ponto passam infinitas retas
( ) por dois pontos distintos passa uma reta
( ) uma reta contem dois pontos distintos
( ) dois pontos distintos determinam uma e só uma reta
( ) por três pontos distintos passam em uma e só em uma reta
( ) três pontos distintos são sempre colineares
( ) três pontos distintos são sempre coplanares
( ) quatro pontos todos distintos determinam duas retas
( ) por quatro pontos todos distintos pode passar uma única reta
( ) três pontos pertencentes a um plano são sempre colineares

2. Calcular o valor de x no caso ao lado em que $m(r\hat{O}s) = 90°$.



3. A soma de dois ângulos adjacentes é 120º. Calcule a medida de cada ângulo, sabendo que a medida de um deles é o triplo do outro menos 40º.

4. Calcular o complemento e suplemento dos seguintes ângulos:
a) 25º
b) 47º
c) 37º25´
d) 72º
e) 141º
f) 93º15´

5. Determinar a medida do ângulo igual ao triplo do seu complemento?

6. Calcular o ângulo que vale o quádruplo do seu complemento?

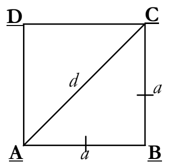
7. Calcular um ângulo, sabendo-se que um quarto do seu suplemento vale 36º.

8. O triplo do complemento de um ângulo aumentado de 50º é igual ao suplemento do ângulo. Determinar a medida do ângulo.

3. SENO, COSSENO E TANGENTE

DIAGONAL DO QUADRADO

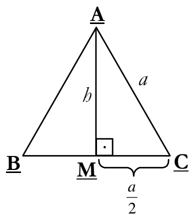
Dado um quadrado de lado *a*, calcular sua diagonal *d*. Sendo *ABCD* o quadrado de lado *a*, da figura abaixo, aplicando o teorema de Pitágoras no Δ *ABC*, temos:



- $d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2 \Rightarrow$
- $\boxed{d = a\sqrt{2}}$

ALTURA DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

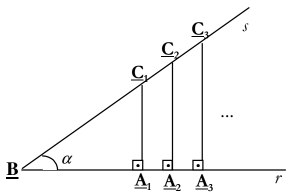
Dado um triângulo equilátero de lado *a*, calcular sua altura *h*. Sendo *ABC* um triângulo equilátero de lado *a*, assim como ilustra a figura, *M* o ponto médio de $\overline{BC}$, calculamos $\overline{AM} = h$ aplicando o teorema de Pitágoras no Δ *AMC*.



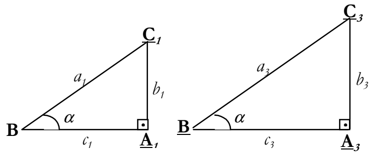
$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow \boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

SENO, COSSENO E TANGENTE

Consideremos duas retas transversais *r* e s, que interceptam-se no ponto B e formam um ângulo α entre si. Essas retas são cortadas por um feixe de paralelas perpendicular a reta *r*, como ilustrado na figura. A intersecção das paralelas com as retas *r* e *s* determinam respectivamente os pontos A_n e C_n, formando assim triângulos retângulos semelhantes ($A_1BC_1 \approx A_2BC_2 \approx A_3BC_3 \approx$ ...) pelo caso de semelhança ângulo-ângulo. Afinal, temos o ângulo $\hat{B}$ e o ângulo reto comum a todos os triângulos.



Seja então, A_1BC_1 um desses triângulos de hipotenusa a_1 e catetos b_1 e c_1, escolhendo ao acaso um segundo triângulo qualquer, por exemplo, o triângulo A_3BC_3 de hipotenusa a_3 e catetos b_3 e c_3, assim como na figura.



Podemos escrever então:

$$\frac{b_1}{b_3} = \frac{a_1}{a_3}, \text{ ou ainda, } \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_3}{a_3}.$$

Isso significa que, nesses dois triângulos retângulos, a razão entre o cateto oposto ao ângulo α e a respectiva hipotenusa é mantida, ou seja, é constante.

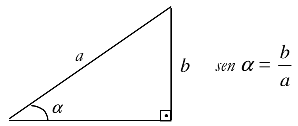
De modo análogo, a razão $\frac{c_1}{a_1}$ bem como a razão $\frac{b_1}{c_1}$ se mantêm, isto é, são iguais a qualquer $\frac{c_n}{a_n}$ e $\frac{b_n}{c_n}$, respectivamente.

A partir do foi exposto vamos apresentar algumas definições, lembrando que a razão entre dois lados quaisquer de um triângulo retângulo depende unicamente da medida α .

SENO DO ÂNGULO α (SEN α)

É a razão entre a medida do cateto oposto a α e a medida da hipotenusa.

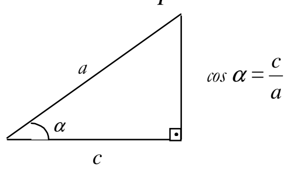
$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ \ oposto\ o\ \ a\ \ \alpha}{hipotenusa}$$



COSSENO DO ÂNGULO α (COS α)

É a razão entre a medida do cateto adjacente a α e a medida da hipotenusa.

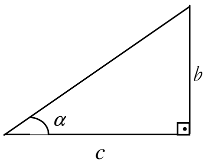
$$\cos\alpha = \frac{cateto\ adjacente\ \ a\ \ \alpha}{hipotenusa}$$



TANGENTE DO ÂNGULO α (TG α)

É a razão entre a medida do cateto oposto a α e a medida do cateto adjacente a α.

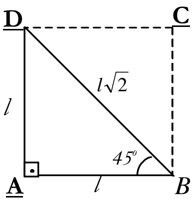
$$tg\alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}$$



$tg\,\alpha = \dfrac{b}{c}$

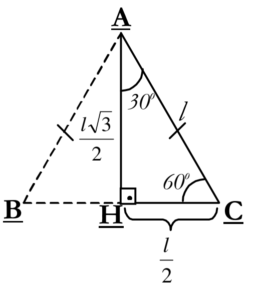
Seno, cosseno e tangente de 30º 45º e 60º

Sabemos que quando traçamos a diagonal de um quadrado de lado *l*, formamos um triângulo retângulo isósceles, cuja medida dos ângulos internos é de *45º*. Deste modo, aplicando a definição de seno, cosseno e tangente sobre o ângulo conhecido, obtemos:

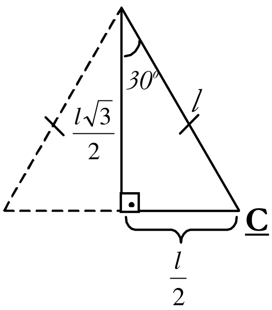


- $sen\,45^o = \dfrac{l}{l\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $tg\,45^o = \dfrac{l}{l} = 1$
- $cos\,45^o = = \dfrac{l}{l\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Sabemos que quando traçamos a altura de um triângulo equilátero de lado *l*, formamos um triângulo retângulo cujos catetos são a altura (*h*), que como foi visto vale $l\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, e a metade da base (*l/2*) e cuja medida dos ângulos internos é de *60º* e *30º*, assim como nos mostra a figura. Novamente aplicando a definição, temos:



- $sen\,60^o = \dfrac{l\frac{\sqrt{3}}{2}}{l} = \dfrac{l\sqrt{3}}{2l} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $cos\,60^o = \dfrac{\frac{l}{2}}{l} = \dfrac{l}{2l} = \dfrac{1}{2}$
- $tg\,60^o = \dfrac{l\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = l\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2}{l} = \sqrt{3}$



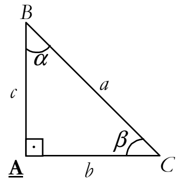
- $sen\,30^o = \dfrac{\frac{l}{2}}{l} = \dfrac{l}{2l} = \dfrac{1}{2}$
- $cos\,30^o = \dfrac{l\frac{\sqrt{3}}{2}}{l} = \dfrac{l\sqrt{3}}{2l} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $tg\,60^o = \dfrac{\frac{l}{2}}{l\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{l}{2}\cdot\dfrac{2}{l\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Como esses resultados são muito importantes, montaremos uma tabelinha prática com o intuito de que você possa, através do uso, memorizá-la.

α	30^0	45^0	60^0
sen α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Ângulos complementares

Da figura:



temos:

$$sen\,\alpha = \frac{b}{a} \qquad sen\,\beta = \frac{c}{a}$$

$$cos\,\alpha = \frac{c}{a} \qquad cos\,\beta = \frac{b}{a}$$

$$tg\,\alpha = \frac{b}{c} \qquad tg\,\beta = \frac{c}{b}$$

O que resulta:

$$\begin{array}{|l|} sen\,\alpha = cos\,\beta \\ cos\,\alpha = sen\,\beta \\ tg\,\alpha = \dfrac{1}{tg\beta} \end{array}$$

Daí concluímos que se dois ângulos são complementares,

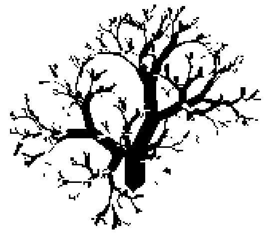
o seno de um é igual ao cosseno do outro.
suas tangentes são inversamente proporcionais.

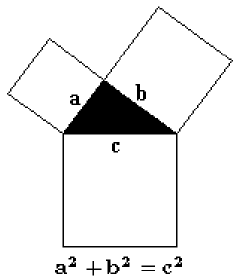
Ainda, como $\alpha + \beta = 90^o$, então $\beta = 90^o - \alpha$.

$$\begin{array}{|l|} sen\,\alpha = cos\,(90^o - \alpha) \\ cos\,\alpha = sen\,(90^o - \alpha) \\ tg\,\alpha = \dfrac{1}{tg(90^o - \alpha)} \end{array}$$

Curiosidade

A Árvore de Pitágoras

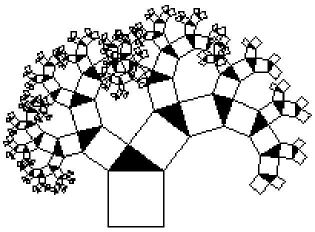




- Fractal do Teorema de Pitágoras
- Figura Representativa

"A figura "Fractal do teorema de Pitágoras" foi gerada por um programa de computador chamado Maple V R4 a partir da "figura representativa" do teorema de Pitágoras.

Para compreender a construção desse fractal começaremos estudando sua versão bidimensional. Observe na figura abaixo que o primeiro estágio consiste da figura representativa do Teorema de Pitágoras, constituída por um triângulo retângulo e os três quadrados desenhados sobre os lados. No segundo estágio são desenhados dois triângulos retângulos com hipotenusas coincidentes com os lados dos quadrados menores, em oposição ao primeiro triângulo. Sobre os catetos destes triângulos retângulos são desenhados quadrados e, assim, temos mais duas figuras representativas do Teorema de Pitágoras. No terceiro estágio obtemos mais quatro triângulos e sucessivamente, da mesma forma. Esta versão bidimensional da Árvore de Pitágoras tem 128 triângulos e quadrados.



A Árvore de Pitágoras tridimensional pode ser obtida de forma semelhante à bidimensional, apenas com algumas adaptações."

(Texto de:Yolanda Kioko Saito Furuya)

EXERCÍCIOS

1. O ângulo, em relação à horizontal, sob o qual o sol é visto (ângulo de elevação) é, em certo momento, igual a 60º. Calcule a altura de um prédio de apartamentos que, num mesmo instante, projeta uma sombra de 15 m.

2. Do alto de um edifício avista-se a base de um poste sob um ângulo de 30º em relação à horizontal (ângulo de depressão). Qual é a distância do poste ao edifício, se a altura do edifício é de 40 metros?

3. Para se calcular a distância entre duas arvores A e B situadas nas margens opostas de um rio, foi escolhido um ponto C na margem onde está a árvore B, de modo que BC=75m, $A\hat{B}C = 90^0$ e $B\hat{C}A = 60^0$. Adote $\sqrt{3} = 1,73$.

4. (UFPA) Num triângulo retângulo cujos catetos medem 1 e 2, temos o ângulo t oposto ao cateto cujo comprimento é 1. Nestas condições, a alternativa correta é:

I) $\operatorname{sen} t = \dfrac{1}{2}$

II) $\cos t = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

III) $\operatorname{tg} t = 2$

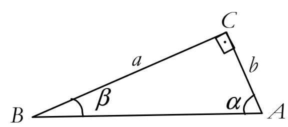
a) I
b) II
c) III
d) II e III
e) I, II e III

5. (VUNESP) Uma rampa lisa de 20 m de comprimento faz ângulo de 30º com plano horizontal. Uma pessoa que sobe essa rampa inteira eleva-se verticalmente:
a) 17 m
b) 10 m
c) 15 m
d) 5 m
e) 8 m

6. Os catetos de um triângulo retângulo medem 4cm e 6cm. Calcular uma razão das projeções desses catetos sobre a hipotenusa.

7. Um helicóptero e um carro de polícia perseguem um carro de bandidos. O helicóptero está a *360m* de altura; o carro da polícia está bem abaixo do helicóptero (no prumo). Do helicóptero o carro dos bandidos é avistado segundo um ângulo de 60º. Qual é a distância entre o carro de polícia e o dos bandidos?

8. (FATEC) No triângulo ABC temos $\alpha = 2\beta$ e $b = 0,625 \cdot a$. Então, $\cos\beta$ é igual a:
a) 0,9
b) 0,8
c) 0,6
d) 0,4
e) 0,1



9. (UN. BAURU SP) Sabendo-se que os lados de um triângulo medem $\sqrt{6}, \sqrt{3}+1$ e 2 assinale a alternativa que indica as medidas dos ângulos internos desse triângulo:
a) 45º, 45º e 90º
b) 30º, 60º e 90º
c) 45º, 60º e 75º
d) 30º, 45º e 105º
e) 15º, 60º e 105º

4. TEOREMA DE TALES

CONTEXTO HISTÓRICO

Tales de Mileto

"Tales é uma figura imprecisa historicamente, pois não sobreviveu nenhuma obra sua. O que sabemos é baseado em antigas referências gregas à história da matemática que atribuem a ele um bom número de descobertas matemáticas.

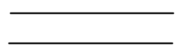
Pouco sabemos sobre a vida e obra de Tales. Supõe-se que começou sua vida como mercador, tornando-se rico o suficiente para dedicar a parte final de sua vida ao estudo e a realização de algumas viagens. Há indícios de que viveu algum tempo no Egito, onde provavelmente aprendeu geometria e na Babilônia onde entrou em contato com tabelas e instrumentos astronômicos. Faz parte do seu mito o fato de ter previsto o eclipse solar de 585 a.C., embora muitos historiadores da ciência duvidem que os meios existentes na época permitissem tal proeza.

Atribui-se a Tales o cálculo da altura das pirâmides, bem como o cálculo da distância dos navios do mar por triangulação. Foi o primeiro personagem conhecido a quem associam-se descobertas matemáticas. Acredita-se que obteve seus resultados mediante alguns raciocínios lógicos e não apenas por intuição ou experimentação.

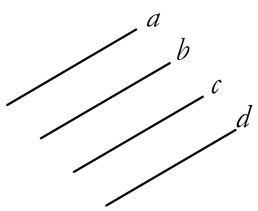
(Texto de: Valéria Ostete Jannis Luchetta; supervisão e orientação: prof. Doutor Francisco César Polcino Milies)

DEFINIÇÕES

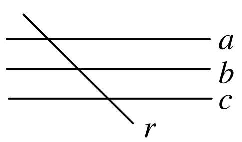
Duas retas de um plano chamam-se paralelas se são coincidentes ou se não possuem ponto em comum.



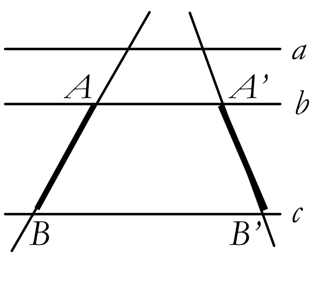
Chama-se de feixe de retas paralelas de um plano o conjunto de todas as retas desse plano, sendo elas paralelas a uma reta dada. Na figura abaixo, as retas *a, b, c* e *d* são paralelas.



Chama-se transversal de um conjunto de retas distintas de um feixe de paralelas à toda reta que intercepta essas retas. Na figura abaixo a reta *r* é transversal às retas *a,b* e *c*.

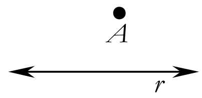


Chamam de segmentos correspondentes em duas transversais de um conjunto de retas distintas de um feixe de retas paralelas, os segmentos situados entre duas retas paralelas quaisquer. Na figura abaixo, AB e A'B' são dois segmentos de retas correspondentes.



AXIOMA DE EUCLIDES

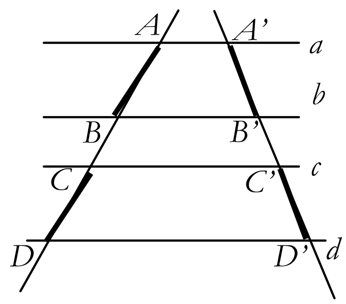
Dado um ponto A e uma reta r num plano α, então existe uma única reta em α que passa por *A* e é paralela a *r*.



TEOREMA DE TALES

Se um conjunto de retas distintas de um feixe de retas paralelas tem duas transversais, então, a razão de dois segmentos quaisquer de uma mesma transversal é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes.

Observando a figura abaixo, temos:



$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

TEOREMA ANGULAR DE TALES

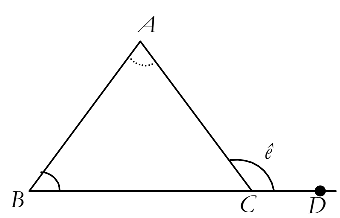
O Teorema Angular de Tales diz que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.

Esse teorema é muito conhecido (assim esperamos) pelos alunos de Ensino Médio. E sua demonstração é simples, tente fazê-la.

TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO

Todo ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Demonstração:



Na figura, *ê* é o ângulo externo, $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são os ângulos internos não adjacentes a ele (ao ângulo *ê*). Pelo Teorema Linear de Tales, temos:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \quad (I)$$

Temos também:

$$\hat{e} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow \hat{C} = 180^\circ - \hat{e} \quad (II)$$

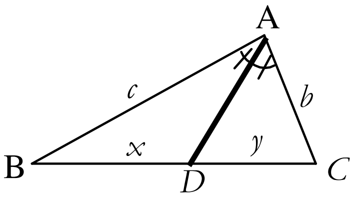
Substituindo *II* em *I* obtemos:

$$\hat{A} + \hat{B} + (180^o - \hat{e}) = 180^o$$

$$\therefore\ \hat{e} = \hat{A} + \hat{B}$$

TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA

A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo determina, no lado oposto ao vértice desse ângulo, segmentos proporcionais aos outros dois lados.

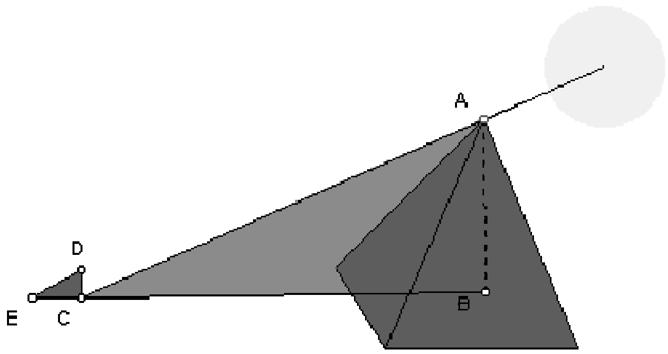


No triângulo da figura acima, $AB = c$ e $AC = b$. A bissetriz $\overline{AD}$ divide o lado $\overline{BC}$ em duas partes de medidas $BD = x$ e $DC = y$, de modo que:

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

CURIOSIDADE

ALTURA DA PIRÂMIDE



"Há duas versões para este fato.

Hicrônimos, discípulo de Aristóteles, diz que Tales mediu o comprimento da sombra da pirâmide no momento em que nossas sombras são iguais a nossa altura, assim medindo a altura da pirâmide.

A de Plutarco diz que fincando uma vara vertical no extremo da sombra projetada pela pirâmide construímos a sombra projetada da vara, formando no solo dois triângulos semelhantes.

Notamos que neste relato é necessário o conhecimento de teoremas sobre triângulos semelhantes.

Observando o desenho acima, a vara colocada no extremo C da sombra da pirâmide forma, com sua sombra, o triângulo DCE que é semelhante ao triângulo ABC.

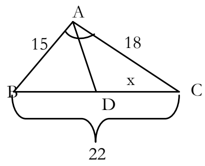
$$\frac{AB}{BC} = \frac{DC}{CE}$$

Medindo as duas sombras e a altura da vara, pode-se determinar então a altura da pirâmide."

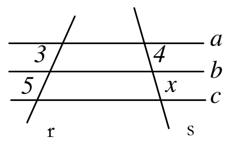
(Texto de: texto de: Valéria Ostete Jannis Luchetta; supervisão e orientação: prof. Doutor Francisco César Polcino Milies)

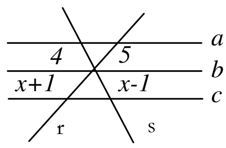
EXERCÍCIOS

1. Na figura, sendo $\overline{AD}$ a bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$, o valor de x é:



2. Em cada uma das figuras abaixo, $a // b // c$ e r e s são transversais. Achar o valor de x:

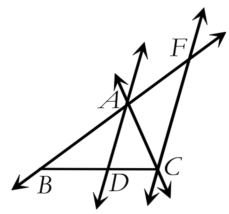




3. Um segmento de reta é a média geométrica de dois outros. Qual é a sua medida, sabendo-se que os outros dois medem 16cm e 49 cm?

4. No desenho, $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{FC}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ é bissetriz de $B\hat{A}C$. Sabe-se que $m(A\hat{F}C) = 17^o$. Então $m(B\hat{A}C) + m(A\hat{C}F) =$

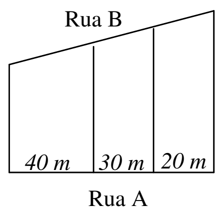
a) 51º
b) 34º
c) 42º30´
d) 25º30´
e) 68º



5. (MAPOFEI) O perímetro de um triângulo ABC é 100 m. A bissetriz do ângulo interno A divide o lado oposto ($\overline{BC}$) em dois segmentos de 16m e 24m. Determinar os lados do triângulo.

6. Um feixe de quatro retas paralelas determina, sobre uma transversal, três segmentos que medem 3 cm, 4 cm e 7 cm. Calcular as medidas dos segmentos que esse mesmo feixe de paralelas determina sobre uma outra transversal, admitindo-se que o segmento compreendido entre a primeira e a última paralela mede 28 cm.

7. (MAPOFEI) Três terrenos têm frentes para a rua *A*. Qual a medida da frente da rua *B* de cada lote, sabendo-se que a frente total para essa rua mede *120 m* e que as laterais dos terrenos são paralelas entre si.



5. PONTOS NOTÁVEIS DOS TRIÂNGULOS

CONTEXTO HISTÓRICO

O Sistema Métrico

"A palavra metro tem origem no grego *métron*, que significa "o que mede".

O sistema métrico surgiu por volta do ano de 1790, antes disso, cada povo usava um sistema de unidades diferentes, o que, naturalmente, causava a maior confusão. Por exemplo: o mesmo comprimento era medido em um lugar usando-se jardas e em outro com o uso de palmos. O resultado disso tornava praticamente impossível a comunicação entre os povos.

Para solucionar esse problema, reformadores franceses escolheram uma comissão de cinco matemáticos para que elaborassem um sistema padronizado. Essa comissão decidiu que a unidade de medida de comprimento se chamaria metro e que corresponderia à décima milionésima parte da distância do equador terrestre ao polo norte, medida ao longo de um meridiano.

Mas a medida da distância do equador ao polo não era nada prática, tanto que ao efetuarem os cálculos os matemáticos acabaram cometendo um erro. Então, em 1875, uma comissão internacional de cientistas foi convidada pelo governo francês para que reconsiderassem a unidade do Sistema Métrico, dessa vez foi construída uma barra de uma liga de platina com irídio, com duas marcas, cuja distância define o comprimento do metro e, para evitar a influência da temperatura, esta barra é mantida a zero grau centígrado, num museu na Suíça.

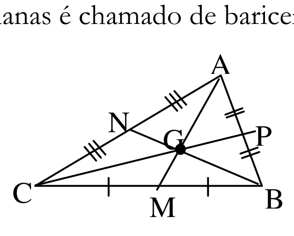
Mas os cientistas não pararam por aí, no decorrer do tempo foram sendo propostas novas definições para o metro. A última que passou a vigorar em 1983, é baseada na velocidade com que a luz se propaga no vácuo.

Resumidamente, pode-se dizer que um metro corresponde à fração 1/300.000.000 da distância percorrida pela luz, no vácuo em um segundo."

BARICENTRO

Teorema: as três medianas de um triângulo interceptam–se num mesmo ponto.

No triângulo *ABC* abaixo, as três medianas $\overline{AM}, \overline{BN}$ e $\overline{CP}$, interceptam–se no mesmo ponto *G*, esse ponto de encontro das medianas é chamado de baricentro do triângulo.



O baricentro tem duas propriedades interessantes e úteis:

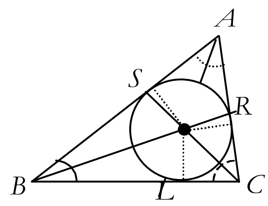
1) o ponto *G* divide as três medianas em duas partes tais que, a parte que contém o vértice é o dobro da outra.Ou seja:

$$\begin{cases} \overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM} \\ \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GN} \\ \overline{CG} = 2 \cdot \overline{GP} \end{cases}$$

2) o baricentro é o centro de gravidade do triângulo.

INCENTRO

Teorema: as três bissetrizes internas de um triângulo interceptam–se num mesmo ponto que está a igual distância dos lados do triângulo.

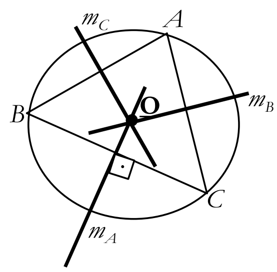


Na figura, as três bissetrizes internas, $\overline{AL}, \overline{BR}$ e $\overline{CS}$, interceptam-se no mesmo ponto *I,* esse ponto de encontro das bissetrizes é denominado incentro do triângulo.

O incentro tem como propriedades importantes, o fato de ser equidistante dos lados, como já foi dito, e ser o centro da circunferência inscrita no triângulo.

CIRCUNCENTRO

Teorema: as três mediatrizes de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto.

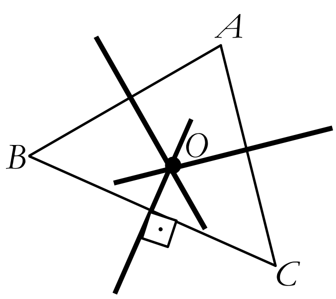


Na figura, as três mediatrizes dos lados $\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{BC}$, interceptam–se no mesmo ponto *O*, esse ponto de encontro das mediatrizes é chamado de circuncentro.

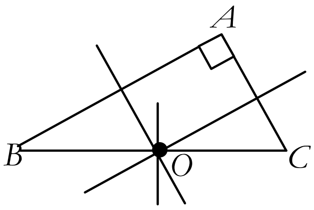
O circuncentro tem como propriedades importantes, equidistar dos vértices e ser o centro da circunferência circunscrita.

Com relação a um triângulo, o circuncentro pode estar:

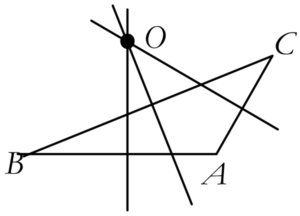
No interior, se o triângulo é acutângulo.



Na hipotenusa, se o triângulo é retângulo.

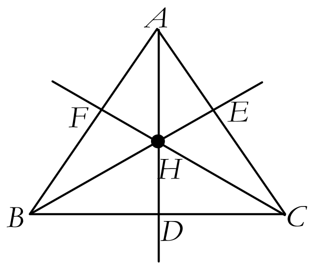


No exterior, se o triângulo é obtuso.



ORTOCENTRO

Teorema: as três retas suportes de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto.

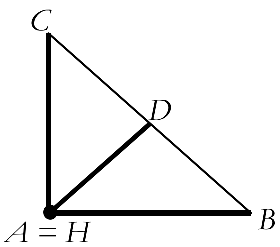


Na figura, as três retas suportes das alturas $\overline{AD}, \overline{BE}$ e $\overline{CF}$, interceptam–se no mesmo ponto *H*, esse ponto de encontro das alturas é chamado de ortocentro.

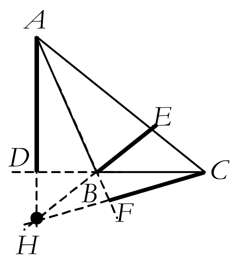
Em relação a um triângulo o *ortocentro* pode estar:

No interior, se o triângulo é acutângulo, assim como na figura acima.

No vértice, se o triângulo é retângulo. Veja a figura:



No exterior, se o triângulo é obtuso. Veja:



CURIOSIDADE

"Os babilônios (2000 a.C.) por usarem numeração na base 60 e conhecerem o número π como 3, dividiram a circunferência (C) em 360 partes (gradus), cada parte foi dividida em 60 partes (minuta) que por sua vez, foram divididas em outras 60 partes (secundus): um grau tem 60 minutos e um minuto, 60 segundos.

O diâmetro (2R) da circunferência foi dividido em 120 partes: 120 . 3 = 360 $120 \cdot 3 = 360 \Rightarrow 2R\pi = C$."

EXERCÍCIOS

1. Associar os nomes:
I - baricentro
II - incentro
III - circuncentro
IV – ortocentro

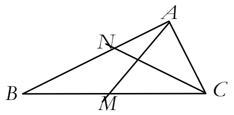
Com as seguintes expressões correspondentes, relativas a um triângulo.
a) ( ) centro da circunferência inscrita
b) ( ) ponto equidistante dos vértices
c) () ponto de encontro das medianas
d) ( ) centro da circunferência circunscrita
e) () ponto de encontro das retas suportes das alturas
f) ( ) ponto que divide cada mediana numa razão de 2 para 1

2. (MACK) Se um ponto *P* no plano de um triângulo é equidistante dos três lados desse triângulo, ele é necessariamente a intersecção das:
a) alturas
b) mediatrizes dos lados
c) medianas
d) bissetrizes dos ângulos internos
e) n.d.a.

3. (MAPOFEI) O centro do circulo inscrito num triângulo é o ponto de encontro das:
a) bissetrizes dos ângulos internos
b) alturas
c) medianas
d) mediatrizes dos lados
e) n.d.a.

4. (FUVEST) Um triângulo *ABC* tem ângulos $\hat{A} = 40^\circ$ e $\hat{B} = 50^\circ$. Qual é o ângulo formado pelas alturas relativas aos vértices *A* e *B* desse triângulo?

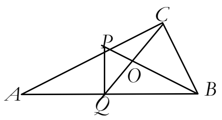
5. Na figura, ABC é um triângulo retângulo em A, $\overline{AM}$ é mediana e $\overline{CN}$ é bissetriz interna. Se o ângulo $A\hat{B}C = 20^o$, então o ângulo $C\hat{D}M$ mede:



6. (FUVEST) Um dos ângulos de um triângulo retângulo mede 20º. Qual a medida do ângulo formado pela mediana relativa à hipotenusa e pela bissetriz do ângulo reto?
a) 10º
b) 15º
c) 20º
d) 25º
e) 30º

7. (FUVEST) Num triângulo isósceles um ângulo $\hat{A}$ mede 100º. Qual o ângulo formado pelas alturas que não passam pelo vértice A?

8. Na figura, Q é o ponto médio de $\overline{AB}$ e $\overline{QP}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Sendo $\overline{AC} = 30\,m$, determine $\overline{PO}$.



6. RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

CONTEXTO HISTÓRICO

Frações

"Todos os anos, no mês de julho, as águas do Rio Nilo inundavam uma vasta região ao longo de suas margens. Estas águas fertilizavam os campos, beneficiando a agricultura do Egito. Cada pedaço de terra às margens desse rio era precioso e tinha que ser muito bem cuidado.

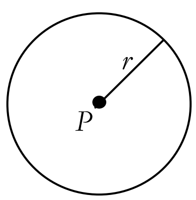
Por volta do ano 3000 a.C., o Faraó *Sesóstris* repartiu essas terras entre uns poucos agricultores privilegiados. Todos os anos, em setembro, quando as águas baixavam, funcionários do governo faziam a marcação do terreno de cada agricultor. Esses funcionários eram chamados de agrimensores ou estivadores de corda. Isso se explica pelo fato de que usavam cordas com uma unidade de medida assinalada, essa corda era esticada para que se verificasse quantas vezes aquela unidade de medida estava contida nos lados do terreno. Mas, na maioria das vezes, acontecia o fato da unidade de medida escolhida não caber um número inteiro de vezes nos lados do terreno.

Para solucionar o problema da medição das terras, os egípcios criaram um novo número, o número fracionário, que era representado com o uso de frações. Eles entendiam a fração somente como uma unidade, portanto, utilizavam apenas frações unitárias (com numerador igual a 1). A escrita dessas frações era feita colocando um sinal oval sobre o denominador.

No Sistema de Numeração usado pelos egípcios os símbolos se repetiam com muita frequência, tornando os cálculos com números fracionários muito complicados. Com a criação pelos hindus do Sistema de Numeração Decimal, o trabalho com as frações tornou-se mais simples e a sua representação passou a ser expressa pela razão de dois números naturais."

INTRODUÇÃO

Antes de vermos as relações métricas na circunferência veremos algumas considerações importantes.
Primeiramente vamos definir o que é uma circunferência: seja P um ponto num plano e r um número real positivo. Chama-se circunferência de centro P e raio r ao conjunto de pontos que distam r do ponto P.

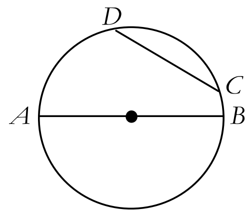


Circunferências distintas podem ter o mesmo centro, quando isso ocorre dizemos que são concêntricas.

CORDA E DIÂMETRO

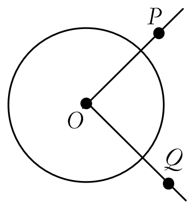
A corda de uma circunferência é um segmento de reta que tem suas extremidades na circunferência. Já o diâmetro de uma circunferência é uma corda que passa pelo centro. Note também que o diâmetro (d) é o dobro do raio, ou seja: $d = 2r$.

Na figura abaixo temos que $\overline{AB}$ é diâmetro da circunferência e $\overline{CD}$ é uma corda, veja:

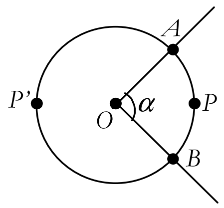


ÂNGULOS E ARCOS NUMA CIRCUNFERÊNCIA

O ângulo central é aquele que tem o vértice no centro da circunferência. A figura, onde $P\hat{O}Q$ é ângulo central, nos exemplifica um ângulo central:



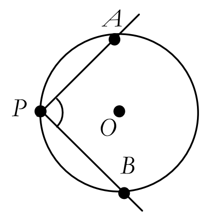
O Arco é o conjunto de pontos da circunferência que pertencem ao interior de um ângulo. Na figura *APB* é arco menor e *AP'B* é arco maior.



Quando o arco é formado por um ângulo central temos a medida do arco igual à medida do ângulo, logo: $m(APB) = \alpha$.

Ângulo inscrito numa circunferência é um ângulo cujo vértice pertence a circunferência e cujos lados são secantes a mesma.

Na figura, o ângulo *APB* está inscrito na circunferência e forma o arco *AB*.



Vimos que a medida do ângulo central é igual a medida do arco, isso não ocorre com o ângulo inscrito.

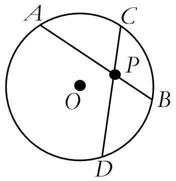
TEOREMA

A medida do arco formado por um ângulo inscrito numa circunferência é o dobro da medida do ângulo.

Deste modo temos: $m(AB) = 2\alpha$

RELAÇÕES MÉTRICAS NUMA CIRCUNFERÊNCIA

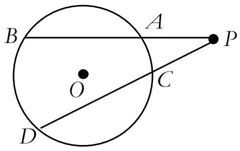
TEOREMA DAS CORDAS



Seja P um ponto interno a uma circunferência. Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são cordas da circunferência e interceptam-se em P, então:

$$\boxed{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$$

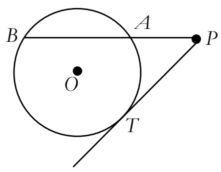
TEOREMA DAS SECANTES



Seja P um ponto exterior a uma circunferência. Se r e s são retas secantes a circunferência por P e que interceptam-na nos pontos A e B, C e D respectivamente, então:

$$\boxed{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$$

TEOREMA ST (SECANTE E TANGENTE)



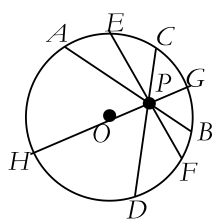
Seja P um ponto exterior a uma circunferência. Se r é uma reta que passa por P e secante a circunferência nos pontos A e B, e s outra reta por P tangente a circunferência no ponto T, então:

$$\boxed{PT^2 = PA \cdot PB}$$

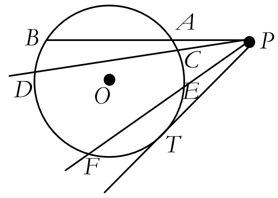
POTÊNCIA DE UM PONTO

Veja os exemplos abaixo:

a)



b)



Do exemplo *a)* podemos concluir, usando o Teorema das Cordas, que:

$$\boxed{PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE \cdot PF = PG \cdot PH = \ldots = k_1}$$

Note que k_1 é uma constante.

Do exemplo *b)* podemos concluir, usando o Teorema das secantes e o Teorema ST, que:

$$\boxed{PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE \cdot PF = \ldots = PT^2 = k_2}$$

Os produtos k_1 e k_2 são chamados de potência do ponto P em relação à circunferência de centro O.

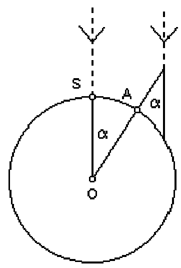
CURIOSIDADES

A MEDIDA DO RAIO DA TERRA

"Erastóstenes é lembrado nos dias de hoje, principalmente por seu "crivo" para determinar números primos. Porém, talvez seu trabalho mais interessante seja a medida da Terra. Sua tentativa não foi a primeira nem a última na Antiguidade, mas contudo foi a de mais sucesso.

Ele observou que num dia de solstício de verão, em Siene (hoje Aswan), o Sol brilhava diretamente para dentro de um poço profundo.

Ao mesmo tempo, em Alexandria, cidade que se localizava no mesmo meridiano de Siene, o Sol não iluminava o fundo do poço. Colocando uma vara na vertical era possível perceber que formava uma sombra. Assim verificou que esta sombra indicava que os raios do Sol formavam, com a vertical do lugar, um ângulo que era de um cinquenta avos de uma circunferência.



Se α é o ângulo formado por A com a sombra produzida pelos raios solares, então o ângulo SOA é igual a α, ou seja um cinquenta avos da circunferência.

A distância entre Siene e Alexandria foi estimada em 5.000 estádios e como a circunferência da Terra deveria ser 50 vezes essa distância, foi encontrado um perímetro de 250.000 estádios.

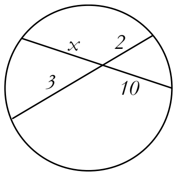
Textos posteriores indicavam 252.000 ao invés de 250.000 estádios, talvez para fornecer uma cifra redonda de 700 estádios por grau.

Um estádio era próximo de um décimo de milha, assim 252.000 estádios é o mesmo que 24.662 milhas (aproximadamente 37.000 quilômetros) e o diâmetro da Terra foi calculado como 7.850 milhas, apenas 50 milhas a menos que o verdadeiro diâmetro polar."

(Texto de: Fernanda Buhrer Rizzato)

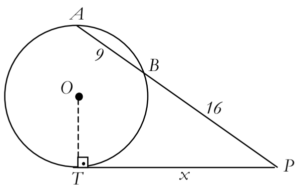
EXERCÍCIOS

1. (FUVEST) – O valor de x na figura abaixo é:



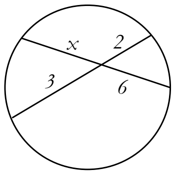
a) $\frac{20}{3}$
b) $\frac{3}{5}$
c) 1
d) 4
e) 5

2. O valor de x na figura é:



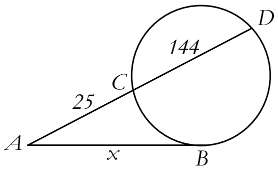
a) 10
b) 12
c) 15
d) 16
e) 20

3. (FUVEST) – O valor de x na figura abaixo é:



a) $\frac{20}{3}$
b) $\frac{3}{5}$
c) 5
d) 4
e) 1

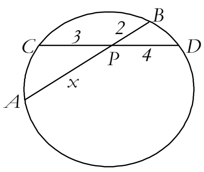
4. (CESCEM) Na figura, $\overline{AB}$ é tangente à circunferência. O valor de x é:



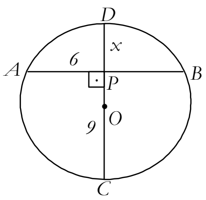
a) 60
b) $60\sqrt{2}$
c) $60\sqrt{3}$
d) 65
e) $65\sqrt{2}$

5. Em cada uma das figuras, as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ da circunferência de centro O interceptam-se no ponto P. Calcule o valor de x.

a)

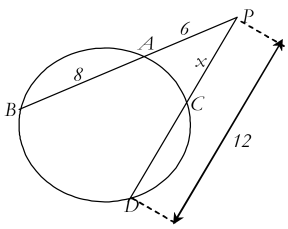


b)

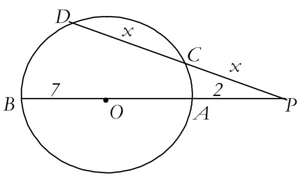


6. Em cada uma das figuras, PAB e PCD são secantes à circunferência de centro O. Calcule o valor de x.

a)

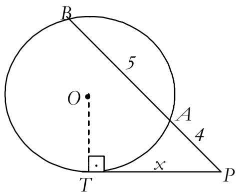


b)

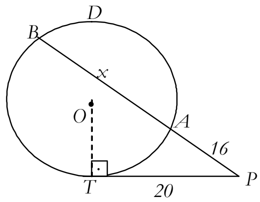


7. Em cada uma das figuras, PAB é uma secante e a reta PT é tangente à circunferência de centro O. Calcule o valor de x.

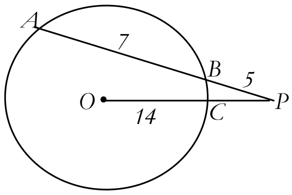
a)



b)



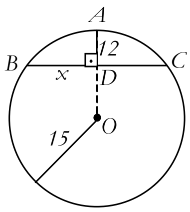
8. Na figura, a circunferência de centro O tem raio *14 cm,* AB = 7 cm e PB = *5 cm*. Calcule PC.



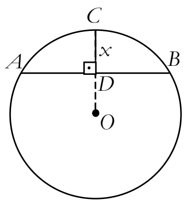
9. (UFMG) Num círculo, a corda $\overline{CD}$ é perpendicular ao diâmetro $\overline{AB}$ no ponto E. Se $AE \cdot EB = 3$, a medida CD é:

a) 3
b) $\sqrt{3}$
c) $2\sqrt{3}$
d) $3\sqrt{3}$
e) 6

10. (ANGLO) Na figura, calcular o valor de x:



11. O raio da circunferência de centro O mede 10*cm* e a corda $\overline{AB}$ tem comprimento de 12*cm*. A medida da flecha $\overline{CD}$, conforme a figura, é:



a) 1 *cm*
b) $\sqrt{2}$ *cm*
c) $\sqrt{3}$ *cm*
d) 2 *cm*
e) 3 *cm*

7. RELAÇÕES MÉTRICAS NUM TRIÂNGULO QUALQUER

CONTEXTO HISTÓRICO

O Início da trigonometria (período: 430 a.C., aprox.)

"As origens da trigonometria são incertas. É possível encontrar problemas que envolvem a co-tangente no *Papiro Rhind* e uma notável tábua de secantes na tábua cuneiforme babilônica Plimpton 332.

O desenvolvimento da trigonometria está bastante ligado à astronomia. Os astrônomos babilônicos dos séculos IV e V a.C. obtiveram várias informações que foram transmitidas para os gregos, foi essa astronomia primitiva que deu origem à trigonometria esférica.

Foram os gregos que pela primeira vez fizeram um estudo das relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos que subtendem. Nas obras de Euclides já existiam teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas. Em *Os Elementos* é possível encontrar as leis do cosseno para ângulos obtusos e agudos.

Hiparco de Niceia ganhou o direito de ser chamado "o pai da trigonometria", pois na segunda metade do século II a.C., fez um tratado em doze livros que se ocupa da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, uma tábua de cordas, Ptolomeu também construiu uma tabela de cordas que fornece o seno dos ângulos de 0ºa 90º com incrementos de 15". Evidentemente, Hiparco fez estes cálculos para usá-los em sua astronomia.

Mas apesar das contribuições de Hiparco, a mais influente e significativa obra trigonométrica da antiguidade foi a *Syntaxis Matemática*, obra escrita por Ptolomeu que contém 13 livros. Este tratado é famoso por sua elegância e, para distinguí-lo de outros, foi associado a ele o superlativo *magiste* ou "o maior". Mais tarde na Arábia o chamaram *Almagesto*, por designação da língua e, a partir de então, a obra é conhecida por esse nome.

(Texto de: Fernanda Buhrer Rizzato)

LEI OU TEOREMA DOS COSSENOS

A Lei dos Cossenos diz que: em todo triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto das medidas desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado entre eles. Ou seja:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \end{aligned}}$$

Demonstração:

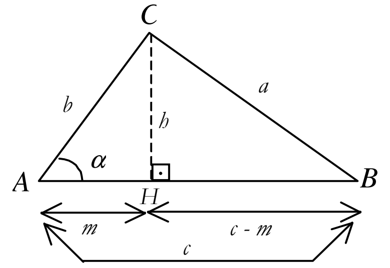
Vamos demonstrar o Teorema da Lei dos cossenos para um ΔABC tal que:

$$AB = c,\ AC = b \text{ e } BC = a.$$

Supondo que o ângulo de vértice A e medida α seja o maior ângulo do triângulo, temos três casos a considerar: $\alpha < 90^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ ou $\alpha > 90^\circ$.

1º caso: $\alpha < 90^\circ$

Observe a figura abaixo:



Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos HAC e HBC, temos respectivamente:

$$b^2 = h^2 + m^2 \quad (I)$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (c-m)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^2 = h^2 + c^2 - 2cm + m^2 \end{aligned}\right\} \quad (II)$$

Deste modo, fazemos $II - I$ e obtemos a expressão III.

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= h^2 + c^2 - 2cm + m^2 - (h^2 + m^2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cm \end{aligned}$$

Assim, utilizando a definição de cosseno no triângulo AHC, chegamos à:

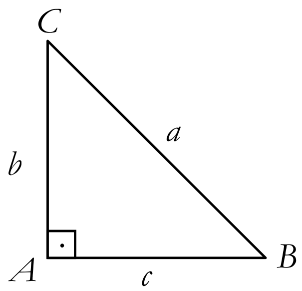
$$\cos\alpha = \frac{m}{b} \therefore m = b\cdot\cos\alpha \qquad (IV)$$

Finalmente substituindo IV em III provamos o teorema:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha}$$

2º caso: $\alpha = 90^\circ$

Observe a figura abaixo:



Sendo o triângulo acima retângulo em A podemos aplicar o Teorema de Pitágoras e obter a seguinte expressão:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

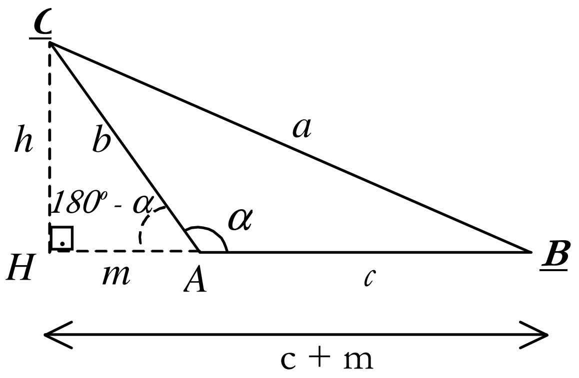
Como $\alpha = 90^\circ$, $\cos\alpha = \cos 90^\circ = 0$, então:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 \underbrace{- 2bc\cdot\cos 90^\circ}_{0} \rightarrow a^2 = b^2 + c^2}$$

Ou seja a lei dos cossenos também é valida para os triângulos retângulos.

3º caso: $\alpha > 90^\circ$

Observe a figura abaixo:



Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos *HAC* e *HBC,* temos:

$$b^2 = m^2 + h^2 \quad (I)$$

$$\left.\begin{aligned} & a^2 = h^2 + (c+m)^2 \Rightarrow \\ & \Rightarrow a^2 = h^2 + c^2 + 2cm + m^2 \end{aligned}\right. \quad (II)$$

Deste modo, fazemos *II – I,* obtemos a expressão *III.*

$$\left.\begin{aligned} & a^2 - b^2 = h^2 + c^2 + 2cm + m^2 - (h^2 + m^2) \Rightarrow \\ & \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2cm \end{aligned}\right. \quad (III)$$

Assim, utilizando a definição de cosseno no triângulo *AHC,* chegamos à:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

Sabendo que $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, a expressão acima passa a ser:

$$m = -b \cdot \cos\alpha \quad (IV)$$

Finalmente, substituindo *IV* em *III*, provamos o teorema:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha}$$

LEI OU TEOREMA DOS SENOS

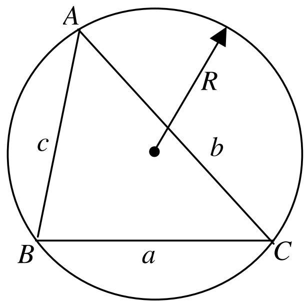
A Lei dos Senos diz que: em todo triângulo, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos e a constante de proporcionalidade é a medida do diâmetro da circunferência circunscrita a esse triângulo.

Ou seja:

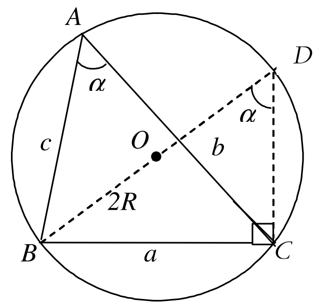
$$\boxed{\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} = 2R}$$

Demonstração:

Dado um ΔABC qualquer, consideremos a circunferência de raio *R* circunscrita a esse triângulo. Assim como ilustra a figura.



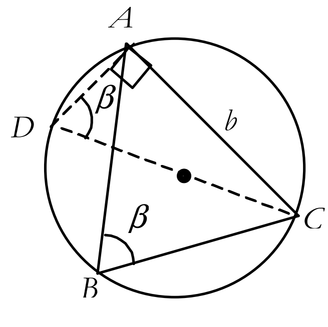
Traçando o diâmetro $\overline{BD}$, temos:

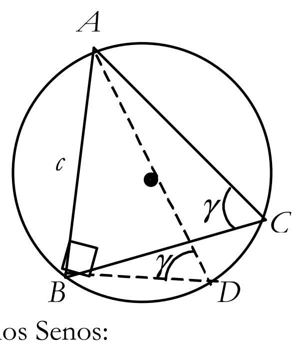


O ângulo $\hat{D}$ é igual ao ângulo Â, pois ambos formam o mesmo arco de circunferência *AB* . No ΔDCB retângulo em *D,* pela definição de seno temos:

$$\boxed{sen\alpha = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{sen\alpha} = 2R}$$

De forma análoga, obtemos os resultados: $\frac{b}{\text{sen }\beta} = 2R$ e $\frac{c}{\text{sen }\gamma} = 2R$





Daí segue a expressão da Lei dos Senos:

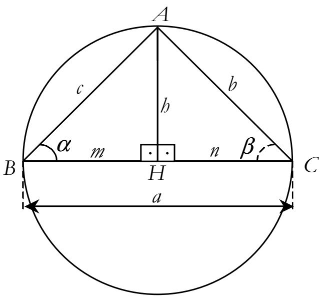
$$\boxed{\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} = 2R}$$

Tente demonstrar você mesmo.

Observação: caso o ângulo *A* seja obtuso ao invés de termos *D=A,* teremos *D=180º -A* o que não altera em nada nosso resultado, pois $\text{sen }\alpha = \text{sen}(180^\circ - \alpha)$.

CURIOSIDADE

CALCULANDO O RAIO DA CIRCUNSCRITA



Sabemos que a área *S* de um triângulo pode ser dada por:

$$\boxed{S = \frac{1}{2} a \cdot b}$$

Observe o triângulo retângulo *ACH* da figura acima. Aplicando a definição de seno, temos: *sen C = h/b* $\Rightarrow$ *h = b.sen C*

Substituindo o *h* na fórmula da área de um triângulo, vem:

$$\boxed{S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sen\hat{C}}$$

Sabemos, do teorema dos senos, que *c/senC = 2R*, onde R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo *ABC*. Logo:

sen C = c / 2R $\Rightarrow$ S = 1/2.a.b.c/2R = abc/4R.

Temos então a seguinte fórmula para o cálculo da área de um triângulo qualquer:

$$\boxed{S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}}$$

Onde *a, b* e *c* são as medidas dos lados do triângulo, *R* é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo e *S* a área do triângulo.

Ainda sabemos que a área de um triângulo *ABC* pode ser dada também pela fórmula:

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Onde *p* é o semi-perímetro do triângulo ou seja: *p = (a+b+c) / 2*

Esta fórmula é conhecida comumente como <u>Fórmula de Heron</u>, célebre geômetra grego de Alexandria que viveu no 1º século da era cristã.

Assim, substituindo o valor de *S* da fórmula anterior, na fórmula *S=abc/4R*, encontraremos uma "fórmula útil" para o cálculo do raio da circunferência circunscrita a um triângulo qualquer de lados a, b e c. Veja:

S = abc / 4R $\Rightarrow$ R = abc / 4S

Portanto,

$$\boxed{R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}}$$

Onde p, conforme vimos acima, é o semiperímetro dado por p = (a+b+c)/2.

Esta curiosidade realmente parece inútil e, a seguir, veremos um exemplo de aplicação:

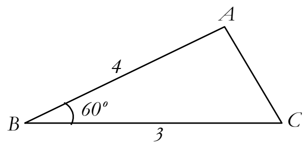
(Vestibular da Univ. Federal do Ceará/1990) Seja R, raio do círculo circunscrito ao triângulo, cujos lados medem 10m, 17m e 21m. Determine em metros, o valor de 8R. (Tente resolver)

BIBLIOGRAFIA

- BIANCHINI, Edwaldo e PACCOLA, Herval. *Matemática 1*. Editora Moderna, 1990.
- Livro de Exercícios 1, 2, 3 e 4 Etapa Vestibulares.
- IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar*. Editora Atual, São Paulo – SP, 1985.
- *Anglo Ensino Médio Livro Texto*. Anglo Editora, São Paulo – SP, 2002.
- *Anglo Ensino Médio Caderno de Exercícios*. Anglo Editora, São Paulo – SP, 2002.
- *Coleção Anglo – Livro 4*. Anglo Editora, São Paulo – SP, 1990-1991.
- *Coleção Anglo – Série Desafio*. Anglo Editora, São Paulo – SP, 1990-1991.
- *Lisa Biblioteca da Matemática Moderna*. Edição de 1969.
- TAHAN, Malba. *As Maravilhas da Matemática*.
- ________, Malba. *O Homem que Calculava*.
- *Matemática nos Vestibulares - Volumes 1 e 2*. Editora Policarpo, 1997.
- *Exercícios de Matemática - Volume 6 - Geometria Plana*. Editora Policarpo, 1997.
- IEZZI, Gelson e demais autores. *Matemática - Volume Único*. Editora Atual.
- Sítios mais utilizados: www.matematica.br e www.somatematica.com.br.

EXERCÍCIOS

1. Determinar o valor de $\overline{AC}$ na figura abaixo:



2. Num triângulo *ABC, AB = 8 cm, AC = 5 cm* e *BÂC = 60º*. Calcule sas medidas:

a) do lado $\overline{BC}$.

b) da projeção do lado $\overline{AC}$ sobre o lado $\overline{AB}$.

3. (FUVEST) *ABC* é triângulo equilátero de lado *4; AM = MC = 2, AP = 3* e *PB = 1*. O perímetro do triângulo *APM* é:

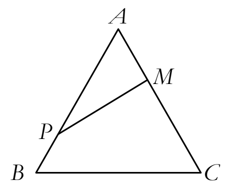
a) $5+\sqrt{7}$

b) $5+\sqrt{10}$

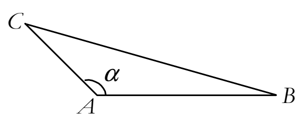
c) $5+\sqrt{19}$

d) $5+\sqrt{13-6\sqrt{5}}$

e) $5+\sqrt{13+6\sqrt{5}}$



4. No triângulo *ABC* da figura, *AB = 6 cm, AC = 4 cm* e $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$. A medida da projeção do lado *AC* sobre a reta suporte do lado *BC,* em *cm,* vale:

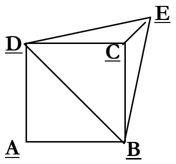


a) $\frac{3}{2}$ b) 1 c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{5}{3}$ e) 2

5. Num triângulo *ABC*, *AB = 3 cm, AC = 2 cm* e *BC = 4 cm.* O cosseno do ângulo oposto ao lado de maior medida vale:

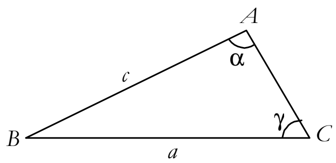
a) -1 b) $\frac{1}{5}$ c) $-\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $-\frac{1}{2}$

6. Na figura, *ABCD* é um quadrado de lado *1cm* e *DBE* é um triângulo equilátero. Determine $\overline{CE}$.



7. (UNICAMP) A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada do rio para uma caixa d'água a *50 m* de distância. A casa está a *80m* de distância da caixa d'água e o ângulo formado pelas direções caixa d'água-bomba e caixa d'água-casa é de 60º. Pretende-se bombear água do mesmo ponto de captação até a casa, quantos metros de encanamento serão necessários?

8. No triângulo *ABC* da figura, $a = 3\sqrt{2}, \alpha = 60^o$ e $\gamma = 45^o$. Calcule *c*.



9. Num triângulo *ABC*, o lado BC mede $4\sqrt{3}$ e o ângulo oposto ao mesmo mede 60º. Calcular a medida do raio da circunferência circunscrita a esse triângulo.

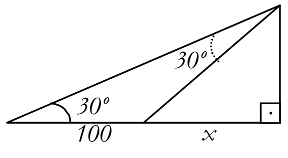
10. O triângulo *ABC* é equilátero de lado *20 cm.* $\overline{AH}$ e $\overline{HD}$ são, respectivamente, as alturas dos triângulos *ABC* e *AHC*. A medida de *HD*, em *cm,* é:

a) $5\sqrt{3}$ b) $10\sqrt{3}$ c) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ d) $6\sqrt{3}$

e) $\frac{12\sqrt{3}}{3}$

11. (USP) Calcule o valor de *x* na figura:

a) 50
b) 60
c) 100
d) $50\sqrt{3}$
e) n. d. a.



12. (ITA) Um triângulo *ABC* esta inscrito numa circunferência de raio $2\sqrt{3}$. Sejam *a, b,* e *c* os lados opostos aos ângulos *A, B* e *C* respectivamente. Sabendo que $a = 2\sqrt{3}$ e os ângulos *A,B* e *C*, estão em progressão aritmética, podemos afirmar que:

a) $c = 4\sqrt{3}, A = 30^o$
b) $c = 3\sqrt{3}, A = 30^o$
c) $b = 6, C = 85^o$
d) $b = 3, C = 90^o$
e) n. d. a.

13. (MAPOFEI) Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem *8m* e *12m* e formam um ângulo de 60º. Calcular as diagonais.

8. ÁREA DOS TRIÂNGULOS

CONTEXTO HISTÓRICO

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA CHINA

A civilização chinesa desenvolveu-se desde o 3º milênio a.C., ao longo das margens do rio Amarelo e do Azul, na dinastia Hsia, iniciada pelo imperador Yu. Continuou com a dinastia Shang, por volta de 1500 a.C., que ocupou a região de Shangai. São desta dinastia os primeiros numerais chineses inscritos sobre carapaças de tartarugas e ossos de animais - os ossos oraculares que usavam para adivinhações. A dinastia Shang domina até cerca de 1027 a.C. A partir daí, o poder é exercido pela dinastia Chou; a China torna-se um Estado feudal. O grande império desintegra-se, por volta do 700 a.C. e até, aproximadamente, 400 a.C. coexistem estados independentes em permanente guerra uns com os outros.

É desta altura o primeiro texto sobre matemática - o *Chou Pei Suan Ching* - que contém um diálogo sobre as propriedades dos triângulos retângulos e, no qual o teorema de Pitágoras é enunciado, é dada uma sua demonstração geométrica. Neste livro existe uma breve explicação sobre o cálculo aritmético. Foi nessa época que surgiram as duas principais correntes filosóficas da China: o confucionismo, que ressaltava os princípios morais, e o taoísmo, que defendia uma vida em harmonia com a natureza.

Por volta de 221 a.C. a China foi reunificada pelo imperador *Shih Huang Ti*, que mandou queimar todos livros, centralizou o poder, construiu cidades, palácios e estradas e iniciou a construção da "*Grande Muralha*" para deter as invasões das tribos mongólicas.

Na dinastia a seguir, a dinastia Han (200 a.C. a 220 d.C.), muitos dedicaram o seu tempo a transcrever, de memória, textos literários e científicos e a procurarem manuscritos que tivesses escapado à destruição. Foi nesta altura que o mais influente dos textos matemáticos chineses foi compilado - *Chiu Chang Suan Shu* (Os Nove Capítulos da Arte Matemática), o livro contém 246 problemas distribuídos por 9 capítulos. É também deste período o texto Shu Shu Chi Yi, em que se encontra uma primeira abordagem dos quadrados mágicos.

A época compreendida entre os anos 221 e 581d.C. é conhecida como a dos três reinados e das seis dinastias. Nesse período, a China sofreu divisões internas e o ataque de diversos povos nômades (tibetanos, turcos e mongóis). Contudo esta época atribulada não pôs cobro à atividade matemática.

Neste período, viveu o matemático Liu Hui (c. 260), que comentou os *Nove Capítulos* e escreveu *Haidao Suanjing* - O manual da Aritmética da Ilha – escrito, inicialmente, como apêndice ao capítulo 9º dos *Nove Capítulos*, o livro contém 9 problemas versando o teorema de Pitágoras e com soluções. É também desta época o livro *Sunzi Suanjing* -- Manual Aritmético do Mestre Sol (c. 300 d.C.) -- escrito por *Sun Zi*; este livro está dividido em 3 capítulos, o último dos tem uma coleção problemas aritméticos.

Na segunda metade do século V, aparece o *Manual Aritmético*, escrito por *Zhang Quijan,* este livro contém 92 problemas divididos por 3 capítulos.

Em 581, a dinastia Sui (581 a 618), reunificou, de novo, o país. Segui-se a dinastia Tang (618-906), quando a China conheceu grande desenvolvimento artístico (poesia e pintura), científico e entrou em contato com outras civilizações, como a japonesa, a coreana, a indiana e a árabe. Este período foi caracterizado por uma forte influência estrangeira. É desta altura que o texto *Jigu Suanjing* - Continuação da Matemática Antiga (cerca de 625) - foi escrito por Wang Xiatong e contém 22 problemas sobre irrigação, construção de celeiros e resolução de triângulos retângulos. É, também deste período uma enciclopédia sobre a matemática clássica do passado - *Suan Ching Shih Shu* - Os Dez Manuais de Matemática.

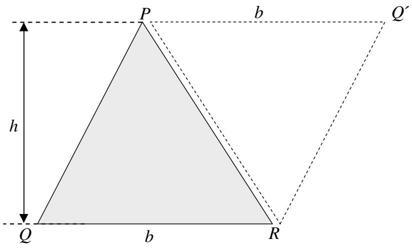
O período de florescimento cultural e de expansão territorial da dinastia Tang terminou com a derrota chinesa frente aos árabes em 751, na fronteira norte-ocidental. A partir desse momento, começou uma fase de decadência e esta resultou em nova fragmentação que sobreveio à queda dos Tang, em 907.

O período das cinco dinastias e dos dez estados, entre 907 e 960, caracterizou-se pelo caos político.

A partir de 960, a dinastia Sung (960-1279) reorganizou o país impondo reformas tributárias que aliviaram a situação econômica dos camponeses e favoreceram o comércio. Nessa época houve grande desenvolvimento cultural, com a difusão de textos impressos. Este período produziu alguns dos grandes matemáticos da China, especialmente do século XIII. (www.matematica.br)

ÁREA DOS TRIÂNGULOS EM FUNÇÃO DA BASE E DA ALTURA

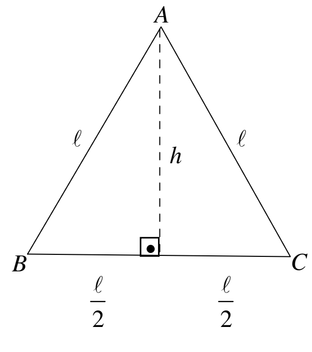
O triângulo PQR, cuja base mede b e a altura mede h, é equivalente ao triângulo $RQ'P$. A área S do triângulo PQR é, portanto, a metade da área do paralelogramo $PQRQ'$, cuja base mede b e, a altura, mede h. Assim:



$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

ÁREA DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Seja ABC um triângulo equilátero de lado ℓ, altura h e área S, conforme mostra a figura abaixo.



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AHC, iremos obter o valor da altura do triângulo equilátero em função do lado. Então:

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

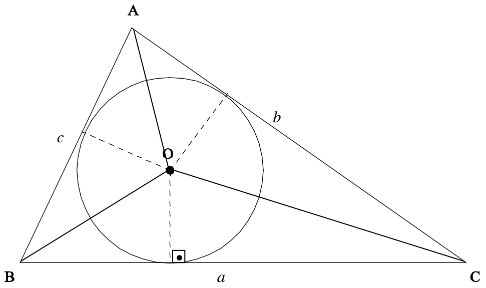
Substituído o valor de h na expressão $S = \frac{b \cdot h}{2}$, temos:

$$S = \frac{\ell \cdot h}{2} \Rightarrow S = \ell \cdot \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow S = \ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Área de um Triângulo em Função do Raio da Circunferência Inscrita

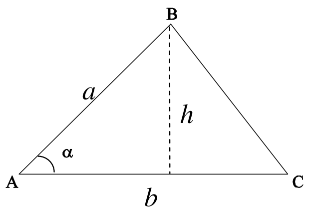
Como foi definido no TÓPICO 10, a área de todo polígono pode ser calculada através do produto do semi-perímetro p e do raio r, como mostra a figura e a fórmula que se seguem.



$$S = p \cdot r$$

Área de um Triângulo em Função de Dois Lados e do Ângulo entre Eles

Sejam a e b a medidas de dois lados de um triângulo ABC e α a medida do ângulo entre eles, conforme ilustra a figura.



No triângulo AHC, a altura h pode ser obtida da seguinte maneira:

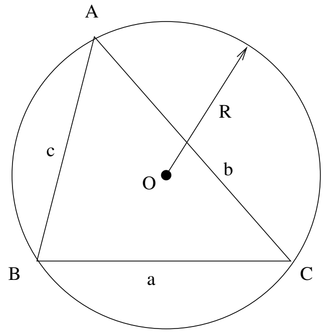
$$sen\alpha = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot sen\alpha,$$

Substituindo o valor de h encontrado na expressão $S = \frac{b \cdot h}{2}$, temos:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot sen\alpha}{2}$$

Área de um Triângulo em Função do Raio da Circunferência Circunscrita

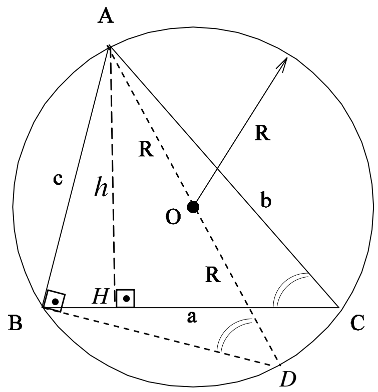
Seja S a área do triângulo ABC de lados a, b e c, e R o raio da circunferência circunscrita a este triângulo.



Podemos calcular a área do triângulo ABC através da seguinte expressão:

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Demonstração



1º passo: traçando o diâmetro $\overline{BD}$, formamos o triângulo ABD, retângulo em $\hat{B}$, e $\hat{D} = \hat{C}$, pois formam o mesmo arco de circunferência. Logo, pelo caso ângulo- ângulo-ângulo temos que $\Delta ABD \sim \Delta AHC$. Temos:

$$\frac{AB}{HA} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{c}{h} = \frac{2R}{b} \Leftrightarrow h = \frac{b \cdot c}{2R}$$

2º passo: a área **S** do triângulo ABC é dada por

$$S = \frac{b \cdot h}{2} \Leftrightarrow S = \frac{b}{2} \cdot h$$

Deste modo, sendo a a base do triângulo ABC e, substituindo h na expressão acima temos:

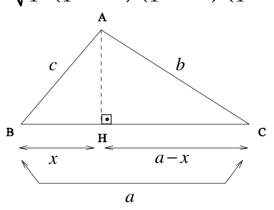
$$S = \frac{a}{2} \cdot \frac{b \cdot c}{2R} \Leftrightarrow S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Área de um Triângulo em Função dos Lados

Fórmula de Hierão

Sendo *a, b* e *c* os lados de um triângulo ABC de área S e semi-perímetro p, temos:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



Demonstração

1º passo:

$$\left.\begin{array}{l} c^2 = b^2 + x^2 \\ a^2 = b^2 + (b-x)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow c^2 - a^2 = x^2 - (b-x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 - a^2 = 2bx - b^2 \Rightarrow x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$$

2º passo:

$$b^2 = c^2 - x^2$$

Assim:

$$b^2 = c^2 - \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4b^2} \Rightarrow$$

CURIOSIDADE

O Problema da Quadratura do Círculo

Dentre os três problemas clássicos da antiguidade, talvez o problema da quadratura do círculo tenha se tornado o mais famoso.

Este problema consistia em encontrar um quadrado de tal forma que a sua área fosse igual à área de um círculo dado. Ele deveria ser resolvido com régua e compasso euclideanos, porém, isto não é possível.

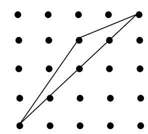
No Papiro Rhind ou Ahmes (os relatos matemáticos mais antigos que se conhecem) é dado uma solução plana para se construir um quadrado de área próxima a de um círculo. Para isso, o lado do quadrado deveria ser $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo. Embora a área encontrada não seja igual a do círculo, é uma boa aproximação, pois corresponde a tomar π=3,1605. Porém, os gregos antigos também tentaram achar outras soluções, através de algumas curvas que foram inventadas, ou através de construções mecânicas.

O primeiro matemático do qual temos registro de ter tentado solucionar este problema foi o grego Anaxágoras.

Adaptação do texto de: Fernanda Buhrer Rizzato; supervisão e orientação: prof. Doutor Francisco César Polcino Milies.

Exercícios

1. (FUVEST) Considere o triângulo representado na malha pontilhada com quadrados de lados iguais a 1 cm. A área do triângulo, em centímetros quadrados, é:



a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

2. (UNIVERSIDADE EST. DO PARÁ) Se os lados de um triângulo mede, respectivamente, 10cm, 12cm e 18cm, então a área desse triângulo é:

a) $40\sqrt{462}\ cm^2$
b) $40\sqrt{3}\ cm^2$
c) $20\sqrt{2}\ cm^2$
d) $40\sqrt{2}\ cm^2$
e) $40\sqrt{10}\ cm^2$

3. (FUVEST) A área de um triângulo de lados a, b e c é dada pela fórmula $S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$ onde p é o semi-perímetro $(2p = a + b + c)$.

Qual a área de um triângulo de lados 5, 6 e 7?

a) 15
b) 21
c) $7\sqrt{5}$
d) $\sqrt{210}$
e) $6\sqrt{6}$

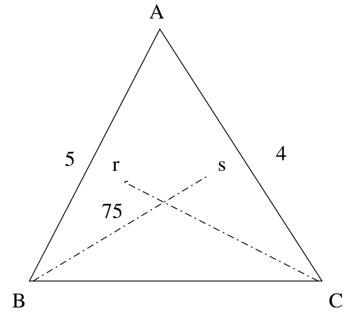
4. (UNICAMP) A área S de um triângulo pode ser calculada pela fórmula: $S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$, onde a, b, c são os comprimentos dos lados e p é o semi-perímetro.

a) Calcule a área do triângulo cujos lados mede 21 , 17 e 10 centímetros.

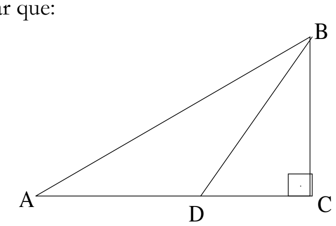
b) Calcule o comprimento da altura relativa ao lado que mede 21 centímetros.

5. (MACKENZIE) Na figura r e s são as bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$. A área dos triângulo ABC é:

a) 4
b) 5
c) 10
d) 20
e) 25



6. (U.F. MARANHÃO) No triângulo ABC, D é o ponto médio do lado AC. Sendo S_1 a área do triângulo ABD e S_2 a área do triângulo BCD, podemos afirmar que:



a) $S_1 = S_2$

b) $S_1 = \frac{1}{2}S_2$

c) $S_2 = \frac{1}{2}S_1$

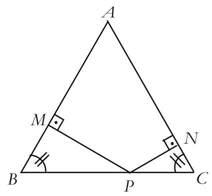
d) $S_1 = \frac{2}{3}S_2$

e) $S_2 = \frac{2}{3}S_1$

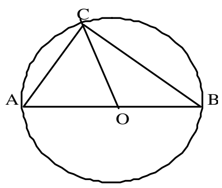
7. (FUVEST) Aumentamos a altura de um triângulo em 10% e diminuímos a sua base em 10%. Então sua área do triângulo:
a) aumenta 1%.
b) aumenta 0,5%.
c) decresce 0,5%.
d) decresce 1%.
e) não se altera.

8. (FUVEST) Um dos catetos de um triângulo retângulo mede 2 e a hipotenusa mede 6. A área do triângulo é:
a) $2\sqrt{2}$
b) 6
c) $4\sqrt{2}$
d) 3
e) $\sqrt{6}$

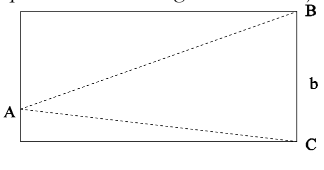
9. (MACKENZIE) A área do triângulo ABC da figura é 10, $\hat{B} = \hat{C}$ e a soma das medidas dos segmentos $\overline{PM}$ e $\overline{PN}$ é 5. O lado $\overline{AC}$ do triângulo mede:
a) 4,0
b) 4,5
c) 5,0
d) 5,5
e) 6,0



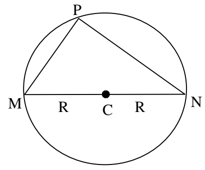
10. (MACKENZIE) Na figura abaixo, $OC = 6{,}5$ e $BC = 12$. A área do triângulo ABC é:
a) 20
b) 30
c) 40
d) 65
e) 120



11. (FEI) Dado o retângulo abaixo de perímetro 16 m, calcular a e b, para que a área do triângulo ABC seja máxima.



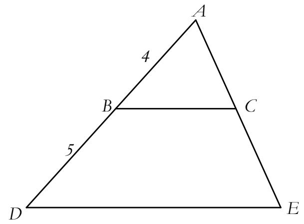
12. (UNIV. ESTADUAL DO CEARÁ) Um ponto P se desloca sobre um semicírculo de raio R, formando-se, para cada posição de P um triângulo MPN (vide figura). A área máxima que o triângulo assume é:



a) $2R^2$
b) $\frac{R^2}{2}$
c) R^2
d) $3R^2$

13. (FUVEST) Seja AB um diâmetro de uma circunferência de raio r e C um ponto genérico da circunferência. Determine a área do triângulo ABC em função do ângulo $A\hat{B}C = \beta$ e do raio r. Para que valor de β esta área é máxima?

14. (FUVEST) Na figura, BC é paralelo a DE, $AB = 4$ e $BD = 5$. Determine a razão entre as áreas do triângulo ABC e do trapézio $BCDE$.



15. (UNICAMP) Os lados de um triângulo medem 5, 12 e 13cm.
a) Calcule a área desse triângulo.

b) Encontre o raio da circunferência inscrita nesse triângulo.

9. ÁREA DE UM CÍRCULO E DAS SUAS PARTES

CONTEXTO HISTÓRICO

A História do π : Um Número Irracional

Os babilônios sabiam trabalhar muito bem com razões de medidas. Descobriram logo que a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro é a mesma para qualquer circunferência e o seu valor dá um número “um pouquinho maior que 3”. Essa razão foi por eles convencionada como o valor de π. Vejamos como eles chegaram a esse valor:

Considerando C o comprimento de uma circunferência e d o diâmetro, temos:

$$\frac{C}{d} = \pi \Leftrightarrow C = \pi \cdot d$$

Os egípcios, para chegarem ao valor de π , calcularam a razão entre o perímetro do octógono regular inscrito e do circunscrito. Calcularam a média desses valores e, então, dividiram pelo diâmetro da circunferência e obtiveram o número $3,1\overline{6}$.

O cálculo do valor exato de π avançou muito depois dos babilônios e dos egípcios e ocupou os matemáticos por muitos séculos.

Arquimedes - o mais famoso matemático da Antiguidade - também procurou calcular a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro. Começando com um hexágono regular, Arquimedes calculou os perímetros dos polígonos obtidos, dobrando sucessivamente o número de lados até chegar a um polígono de 96 lados. Com este polígono, Arquimedes conseguiu para π, um valor entre $3+\frac{10}{70}$ e $3+\frac{10}{71}$. Ou seja, para Arquimedes, π era um número entre 3,1408 e 3,1428.

Ptolomeu, com um polígono de 720 lados, inscrito numa circunferência de 60 unidades de raio, conseguiu calcular o valor de π como sendo $\frac{377}{120}$, que é aproximadamente igual a 3,1416, um valor impressionante para a época.

O fascínio pelo cálculo do valor exato de π também tomou conta dos chineses, no século III d.C., Liu Hui - um copiador de livros - conseguiu obter o valor 3,14159 com um polígono de 3072 lados. Mas, no fim do século V, o matemático Tsu Ch'ung-chih foi mais longe ainda; encontrou como valor de π, um número entre 3,1415926 e 3,1415927.

Quanto maior o número de casas decimais, melhor é a aproximação que se obtém para π!

Até o século XV, o melhor valor para π , havia sido encontrado pelo matemático árabe Al-Kashi: 3,1415926534897932.

Mas o cálculo mais impressionante foi efetuado pelo matemático holandês Ludolph van Ceulen (1540-1610), que partiu de um polígono de 15 lados e dobrando o número de lados 37 vezes, Ceulen obteve um valor para π com 20 casas decimais. Logo em seguida, usando um número de lados ainda maior, ele conseguiu uma aproximação com 35 casas decimais!

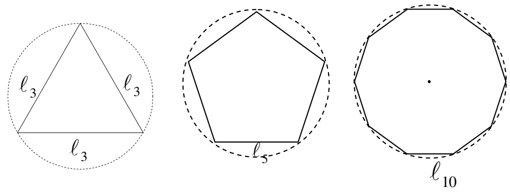
Tamanha deve ter sido a emoção de Van Ceulen que, na sua morte, sua esposa mandou gravar no túmulo o valor π com as 35 casas decimais.

Imagine como ele se sentiria se viesse a saber que no século XX computadores calculariam, em segundos, o valor de π com 100, 1000, 10000, milhões de casas decimais!

π = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940811284811174502841027019385211055596446229489549303819644288109756659334461284756482337867831652712019091456485669234603486104543266482...

ÁREA DE UM CÍRCULO

A área de um círculo pode ser dada pelo limite das áreas dos polígonos regulares inscritos.



Note que, conforme vamos aumentando o numero de lados do polígono regular inscrito, a diferença entre as áreas do círculo e do polígono vão ficando cada vez menores. Isto é, as áreas dos polígonos tendem à área do círculo.

Observe também, que os perímetros dos polígonos vão tendendo ao comprimento da circunferência e, que os apótemas dos polígonos vão se aproximando do raio. Por consequência, a área do polígono vem a ser uma aproximação cada vez maior da área do círculo. Seguindo este raciocínio, temos que o comprimento da circunferência é dado por $C = 2\pi \cdot R$ e a área do círculo é dada por:

$$S_c = \pi R^2$$

DEMONSTRAÇÃO

Seja S_c a área do círculo, S_n a área do polígono regular de **n** lados, a_n o seu apótema e C o comprimento da circunferência. Quando tomamos um **n** muito grande, temos:

$$a_n \to R; 2p \to C; S_n \to S_c$$

(o símbolo $(\to)$ significa “ tende à ”)

Sabemos ainda que a área do polígono regular de **n** lados é dada por:

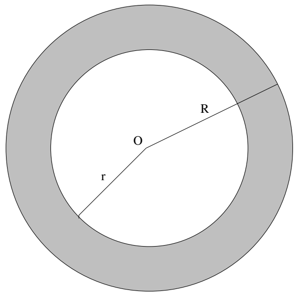
$$S_n = p \cdot a_n \Rightarrow S_n = \frac{2p \cdot a_n}{2}$$

Assim para um valor de **n** muito grande, temos:

$$S_n = \frac{2p \cdot a_n}{2} = S_c = \frac{2\pi R \cdot R}{2} \Rightarrow$$
$$S_c = \pi R^2$$

ÁREA DA COROA

Note que a área da coroa é dada pela diferença entre as áreas dos dois círculos concêntricos.

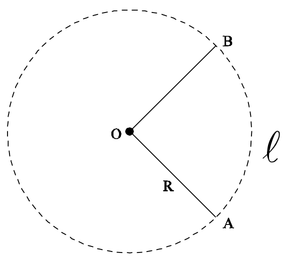


$$S_{coroa} = \pi R^2 - \pi r^2 \Leftrightarrow S_{coroa} = \pi\left(R^2 - r^2\right)$$

ÁREA DO SETOR CIRCULAR

CÁLCULO EM FUNÇÃO DO COMPRIMENTO DO ARCO

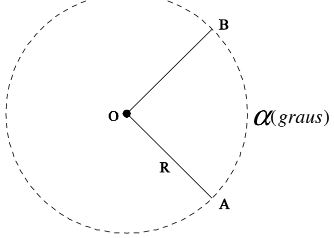
Sendo **S** a área do setor circular de raio **R** limitado por um arco de comprimento ℓ, e sendo o comprimento da circunferência $C = 2\pi \cdot R$, temos:



$$\pi r^2 \text{ —— } 2\pi \cdot r$$
$$S \text{ —— } \ell$$
$$S = \frac{\ell}{2\pi R} \cdot \pi R^2 \Leftrightarrow S = \frac{\ell \cdot R}{2}$$

CÁLCULO EM FUNÇÃO DO ARCO MEDIDO EM GRAUS

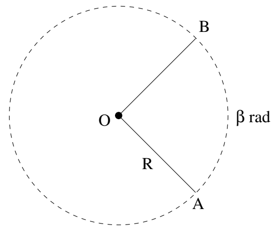
Sendo **S** a área do setor circular de raio **R** limitado por um ângulo α medido em graus, temos:



$$\pi r^2 \text{ —— } 360^\circ$$
$$S \text{ —— } \alpha$$
$$S = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi R^2 \Leftrightarrow S = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot R^2}{360^\circ}$$

CÁLCULO EM FUNÇÃO DO ARCO MEDIDO EM RADIANOS

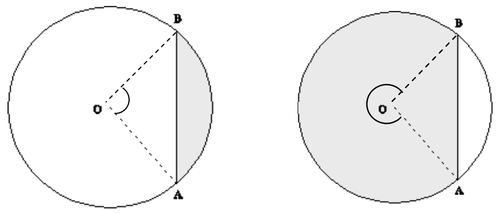
Sendo **S** a área do setor circular de raio **R** limitado por um ângulo β medido em radianos, temos:



$$\pi r^2 \text{ —— } 2 \cdot \pi$$
$$S \text{ —— } \beta\, rad$$
$$S = \frac{\beta}{2\pi} \cdot \pi R^2 \Leftrightarrow S = \frac{\beta \cdot R^2}{2}$$

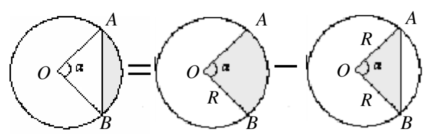
SEGMENTO CIRCULAR

Segmento Circular é uma parte do círculo limitada por um arco de circunferência e uma corda, com extremidades coincidindo com as do arco. Cada uma das figuras abaixo mostra um dos possíveis casos de segmento de um círculo.



ÁREA DO SEGMENTO CIRCULAR

1º Caso: considere um ângulo central α maior que zero e menor que 180º $\left(\alpha = \overset{\frown}{AB}, 0^\circ < \alpha < 180^\circ\right)$. Vejamos então como se obtém a área do segmento.



$$S = S_{setor} - S_{triangulo}$$

A área S do segmento circular limitado pela corda $\overline{AB}$ e pelo arco $\overset{\frown}{AB}$ é obtida da diferença entre a área do setor circular AOB e a área do triângulo AOB. Como vimos anteriormente, a área do setor pode ser calculada de três maneiras diferentes.

Tente você achar a área do setor e do segmento circulares em função do arco em radianos e do arco em graus, seguindo o exemplo para calculá-las em função do comprimento ℓ

Exemplo:

Dados: $\alpha = \overset{\frown}{AB}, 0^o < \alpha < 180^o$, e raio R.

Para calcular a área do **setor** em função do **comprimento** ℓ, procedemos da seguinte maneira:

$$\pi r^2 \;—\; 2\pi \cdot r$$

$$S_{setor} \;—\; \ell$$

$$S_{setor} = \frac{\ell \cdot R}{2}$$

Para calcular a área do **triângulo,** temos;

$$S_{triangulo} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sen\,\alpha$$

$$S_{triangulo} = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot sen\,\alpha$$

Fazendo,

$$S = S_{setor} - S_{triangulo}\text{, temos:}$$

$$S = \frac{\ell \cdot R}{2} - \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot sen\,\alpha$$

Mas,

$$R \cdot sen\,\alpha = h \text{ (porquê?)}$$

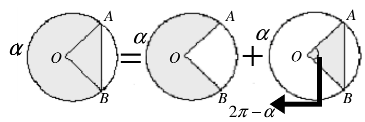
Logo,

$$S = \frac{\ell \cdot R}{2} - \frac{1}{2} \cdot R \cdot h$$

Portanto,

$$S = \frac{R}{2} \cdot (\ell - h)$$

2º Caso: considere um ângulo central α maior que 180º e menor que $360^o\left(\alpha = \overset{\frown}{AB}, 180^o < \alpha < 360^o\right)$. Vejamos então como se obtém a área do segmento.



$$S = S_{setor} + S_{triangulo}$$

A área S do segmento circular limitado pela corda $\overline{AB}$ e pelo arco $\overset{\frown}{AB}$ é obtida pela soma das áreas do setor circular AOB e do triângulo AOB. No exemplo abaixo, vamos calcular a área do setor com o arco medido em radianos.

Exemplo:

Dados: $\alpha = \overset{\frown}{AB}, 180^o < \alpha < 360^o$, e raio R.

$$S = S_{setor} + S_{triangulo} \Rightarrow S = \frac{\alpha \cdot R^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot sen(2\pi - \alpha)$$

$$\therefore S_{segmento} = \frac{R^2}{2}\left[\alpha + sen(2\pi - \alpha)\right]$$

RAZÃO ENTRE AS ÁREAS DE FIGURAS SEMELHANTES

A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

$$k^2 = \frac{S_1}{S_2}$$

Onde:

$$k = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{h}{h'}$$

Demonstração

1º passo: como mostrou a figura acima, temos:

$$k = \frac{b}{b'} = \frac{h}{h'};$$

2º passo: a razão entre as áreas das duas figuras semelhantes é, então, determinada da seguinte maneira:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{\frac{b \cdot h}{2}}{\frac{b' \cdot h'}{2}} \Rightarrow \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{b' \cdot h'} \Rightarrow \frac{b \cdot h}{b' \cdot h'}$$

$$\therefore \frac{b}{b'} \cdot \frac{h}{h'}$$

Como,

$$k = \frac{b}{b'} = \frac{h}{h'},$$

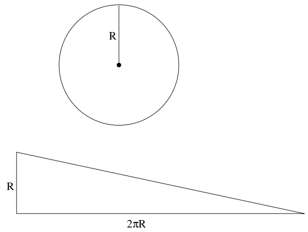
Substituindo,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{h}{h'} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = k \cdot k \Leftrightarrow \quad \therefore k^2 = \frac{S_1}{S_2}$$

CURIOSIDADE

ARQUIMEDES DEMONSTROU QUE:

"Todo círculo é equivalente a um triângulo retângulo cujos catetos têm as mesmas medidas do raio e do perímetro desse círculo."

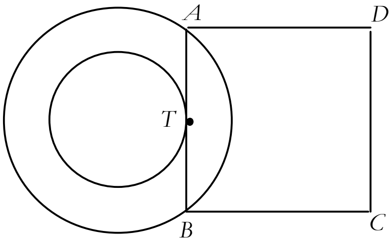


Neste caso, a área dos dois pode ser expressa por:

$$A = \pi r^2$$

EXERCÍCIOS:

1. Sendo de $16\pi\ cm^2$ a área da coroa circular e, $\overline{AB}$, uma corda da circunferência externa, tangente à circunferência interna, calcular o lado do quadrado $ABCD$.



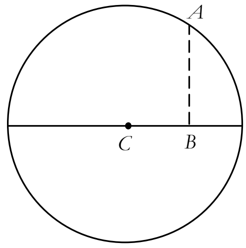
2. (UNICRUZ) Se o arco de $10°$ de um círculo tem $2\pi\ cm$ de comprimento, então a área do círculo é:
a) $416\pi\ cm^2$
b) $798\pi\ cm^2$
c) $1296\pi\ cm^2$
d) $1148\pi\ cm^2$
e) $1148\ cm^2$

3. (FUVEST) Considere um arco AB de $110°$ numa circunferência de raio $10\ cm$. Considere a seguir um arco $A'B'$ de $60°$ numa circunferência de raio $5\ cm$. Dividindo-se o comprimento do arco AB pelo arco $A'B'$ (ambos medidos em centímetros), obtém-se:
a) $\frac{11}{6}$
b) 2
c) $\frac{11}{3}$
d) $\frac{22}{3}$
e) 11

4. (INATEL) Uma competição de velocidade é realizada num pista circular de $60\ m$ de raio. Do ponto de partida até o de chegada, os competidores percorrem um arco de $135°$. Quantos metros, aproximadamente, tem essa competição?
a) 120
b) 125
c) 135
d) 141
e) 188

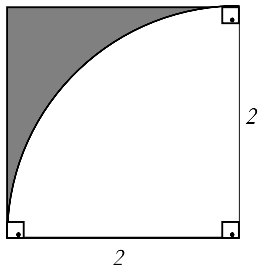
5. (AMAN) Sendo a área de um círculo igual à de um quadrado, a relação entre o raio daquele e o lado deste é:
a) 2π
b) $\frac{\pi}{2}$
c) π^2
d) $\sqrt{\pi}$
e) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

6. (VUNESP) Uma pista de mini-kart tem forma circular. Um dos carros se encontra em um ponto A da pista, que fica a 12m de distância de um ponto B de seu diâmetro, conforme figura. Sabendo que o ponto B divide o diâmetro em duas porções, na razão de 4 para 1, conclui-se que o comprimento da pista, em metros, é, aproximadamente:
a) 94,2
b) 88,4
c) 75,36
d) 60
e) 47,1



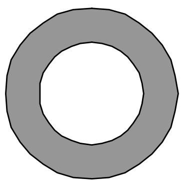
7. (UNIMEP) Uma circunferência C_1 passa pelo centro de outra circunferência C_2 e lhe é tangente. Se $16\ cm^2$ é a área da circunferência C_2, a área da C_1 será:
a) $4\pi\ cm^2$
b) $8\sqrt{2}\ cm^2$
c) $4\ cm^2$
d) $8\ cm^2$
e) $8\pi\ cm^2$

8. (UFSCAR) A área da figura sombreada é:
a) $4-\pi$
b) $4(1-\pi)$
c) $2(2-\pi)$
d) 4
e) π



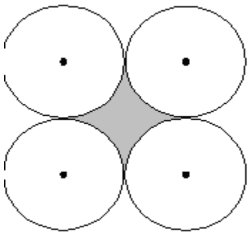
9. A. Como o raio de B tem $1\ cm$ a mais que o raio de A, conclui-se que o raio de A mede, em centímetros,
a) $1+\sqrt{2}$
b) $2+\sqrt{2}$
c) $1+\sqrt{2}$ ou $1-\sqrt{2}$
d) $2\sqrt{2}$
e) 3

10. (PUC-BA) Na figura abaixo temos dois círculos concêntricos, com raio $5\ cm$ e $3\ cm$.



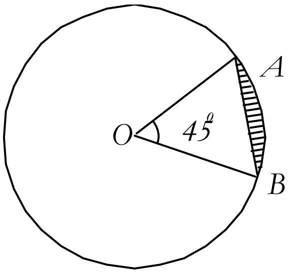
A área da região sombreada, em centímetros quadrados, é:
a) 9π
b) 12π
c) 16π
d) 20π
e) 25π

11. (MACKENZIE) Quatro círculos de raio unitário, cujos centros são vértices de um quadrado, são tangentes exteriormente dois a dois. A área da parte hachurada é:



a) $2\sqrt{3}-\pi$
b) $3\sqrt{2}-\pi$
c) $\frac{\pi}{2}$ -
d) $4-\pi$
e) $5-\pi$

12. (FATEC) Na figura abaixo tem-se uma circunferência C de centro O e raio de medida $3\ cm$. Os pontos A e B pertencem a C, e a medida do ângulo $A\hat{O}C$ é $45°$. A área da região sombreada, em centímetros quadrados, é igual a:



a) $\frac{3}{4}(\pi-\frac{\sqrt{2}}{2})$
b) $\frac{3}{2}(\frac{\pi}{4}-\sqrt{3})$
c) $\frac{9}{4}(\frac{\pi}{2}-\sqrt{2})$
d) $\frac{9}{2}(\frac{\pi}{4}-\sqrt{2})$
e) $\frac{9}{2}(\frac{\pi}{2}-1)$

10. INTRODUÇÃO À TRIGONOMETRIA

MEDIDA DE ARCOS

GRAU

Obtemos um arco de 1º (lê-se um grau) se dividirmos uma circunferência em 360 partes iguais.

RADIANO

Obtemos um arco de 1rad (lê-se um radiano) se dividirmos uma circunferência em partes de comprimento igual ao seu raio. Neste caso, a divisão da circunferência não resultará partes necessariamente iguais pois teremos 6 arcos com 1rad e um arco menor com aproximadamente 0,283185rad (será um número irracional).

CONVERSÃO DE UNIDADES

Para a conversão de graus para radianos (ou vice-versa), utilizamos a seguinte relação:

$$\boxed{\pi rad = 180^\circ}$$

Exemplo

1) Converta 60º em radianos

$$180^\circ \Leftrightarrow \pi rad$$
$$60^\circ \Leftrightarrow x$$
$$180x = 60\pi \Rightarrow x = \frac{60\pi}{180} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \qquad \therefore 60^\circ = \frac{\pi}{3} rad$$

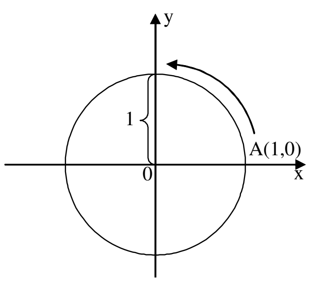
2) Converta $\frac{2\pi}{5} rad$ em graus

$$180^\circ \Leftrightarrow \pi rad$$
$$x \Leftrightarrow \frac{2\pi}{5} rad$$
$$180 \cdot \frac{2\pi}{5} = x\pi \Rightarrow \frac{72\pi}{\pi} = x \Rightarrow x = 72 \qquad \therefore \frac{2\pi}{5} rad = 72^\circ$$

CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Denominamos circunferência trigonométrica, ou ciclo trigonométrico, a circunferência de raio unitário com centro na origem de um sistema de coordenadas cartesianas.

Vamos admitir como origem dos arcos trigonométricos o ponto A(1,0) e o sentido anti-horário como positivo.



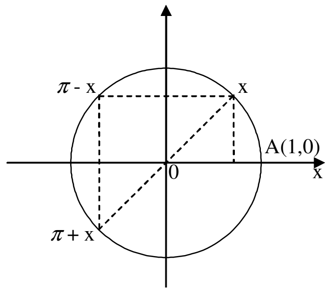
A circunferência fica dividida pelos eixos em quatro partes iguais que chamamos de quadrantes e são numeradas a partir do ponto A no sentido anti-horário.

ARCOS CÔNGRUOS

Se considerarmos mais de um arco, todos com origem em A e a mesma extremidade, dizemos que estes arcos são côngruos entre si. Por exemplo, se tivermos $\frac{\pi}{4} rad\,(45^\circ)$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi\,(405^\circ)$ e $\frac{\pi}{4} + 4\pi\,(765^\circ)$ sabemos que todos eles têm mesma origem A e uma mesma extremidade P, a diferença entre eles é que o arco de 45º está em sua primeira volta, o de 405º está em sua segunda volta e o de 765º, em sua terceira volta.

SIMETRIA

É interessante observarmos que na circunferência trigonométrica existem algumas simetrias. Veja a figura:



EXERCÍCIOS

1. Converta em graus

a) $\frac{11\pi}{6} rad$

b) $\frac{10\pi}{3} rad$

2. Converta em radianos:

a) 270º

b) 120º

3. (FUVEST) Um arco de circunferência mede 300º e seu comprimento é 2 km. Qual é o número inteiro mais próximo da medida do raio, em metros?

a) 157
b) 284
c) 382
d) 628
e) 764

4. (UCMG) Ao projetar prédios muito altos, os engenheiros devem ter em mente o movimento de oscilação, que é típico de estruturas de arranha-céus. Se o ponto mais alto de um edifício de 400m descreve um arco de $(1/2)^{\circ}$, a medida do arco descrito por esse ponto, em metros, é:
a) π
b) $\frac{3\pi}{4}$
c) $\frac{4\pi}{3}$
d) $\frac{10\pi}{9}$
e) $\frac{11\pi}{10}$

5. (Fafi/Fabrai) Considerando que $\pi = 3{,}14$, o número de voltas completas que uma roda de raio igual a 40cm, incluindo o pneu, dará para que o automóvel se desloque 1 quilômetro será de:
a) 290
b) 398
c) 2000
d) 3980

6. (UFCE) Um relógio marca que faltam 15 minutos para as duas horas. Então, o menor dos dois ângulos formados pelos ponteiros das horas e dos minutos mede:
a) 142º30'
b) 150º
c) 157º30'
d) 135º
e) 127º30'

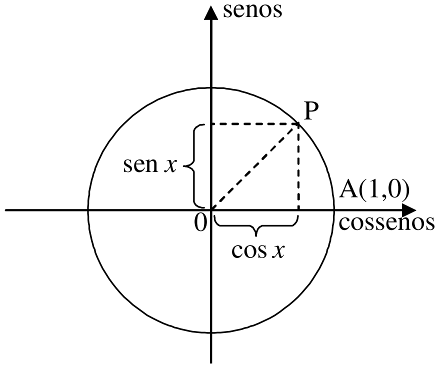
7. (UFOP) Um ciclista de uma prova de resistência deve percorrer 500km em torno de uma pista circular de raio 200m. O número aproximado de voltas que ele deve dar é:
a) 100
b) 200
c) 300
d) 400
e) 500

SENO E COSSENO DE UM ARCO

Se considerarmos um arco com origem A, extremidade P e medida do arco x, na circunferência trigonométrica chamaremos de:

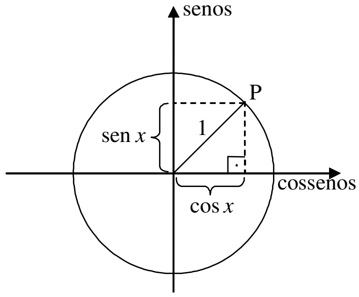
a) Seno de x $(\operatorname{sen} x)$ a ordenada do ponto P.

b) Cosseno de x $(\cos x)$ a abscissa do ponto P.



RELAÇÃO FUNDAMENTAL

Observando a figura abaixo, notamos que há um triângulo retângulo.



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos que:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Também podemos, através da figura, concluir que os valores de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ variam entre -1 e 1, portanto escrevemos:

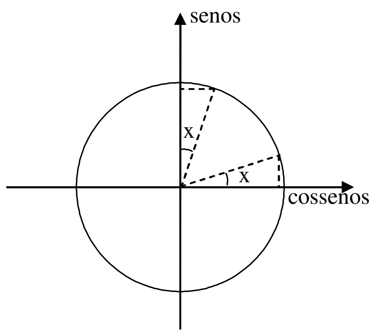
$$-1 \le \operatorname{sen} x \le 1 \text{ e } -1 \le \cos x \le 1$$

ARCOS NOTÁVEIS

• Arco	• 30º	• 45º	• 60º
• Seno	• $\frac{1}{2}$	• $\frac{\sqrt{2}}{2}$	• $\frac{\sqrt{3}}{2}$
• Cosseno	• $\frac{\sqrt{3}}{2}$	• $\frac{\sqrt{2}}{2}$	• $\frac{1}{2}$

RELAÇÃO ENTRE SENO E COSSENO

Observe a figura:



Percebemos então as seguintes relações:

$$\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ e } \cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

EXERCÍCIOS

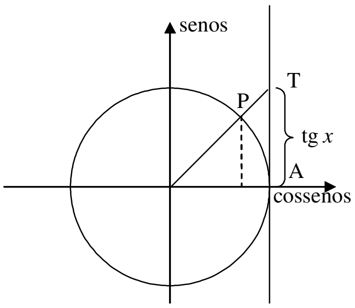
8. (FUVEST) Qual dos números é o maior? Justifique.
a) $\operatorname{sen} 830^\circ$ ou $\operatorname{sen} 1195^\circ$

b) $\cos(-535^\circ)$ ou $\cos 190^\circ$

9. (CESCEM) Os quadrantes onde estão os ângulos α, β e γ tais que:
$\operatorname{sen}\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$
$\cos\beta < 0$ e $\operatorname{tg}\beta < 0$
$\operatorname{sen}\gamma > 0$ e $\operatorname{cotg}\gamma > 0$
são respectivamente:
a) 3º, 2º, 1º
b) 2º, 1º, 3º
c) 3º, 1º, 2º
d) 1º, 2º, 3º
e) 3º, 2º, 2º

TANGENTE DE UM ARCO

Se considerarmos a circunferência trigonométrica, o arco AP e o ponto T pertencente a um eixo paralelo ao eixo das ordenadas com origem no ponto A (eixo das tangentes). A tangente de $x(\operatorname{tg} x)$ será a medida algébrica do segmento AT (a ordenada de T).



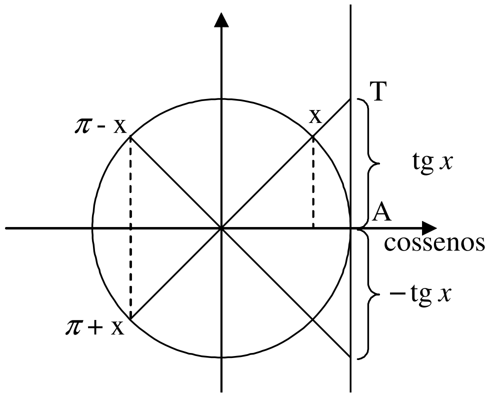
Por semelhança de triângulos concluímos que $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, com $\cos x \neq 0$.

ARCOS NOTÁVEIS

• Arco	• 30º	• 45º	• 60º
• Tangente	• $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	• 1	• $\sqrt{3}$

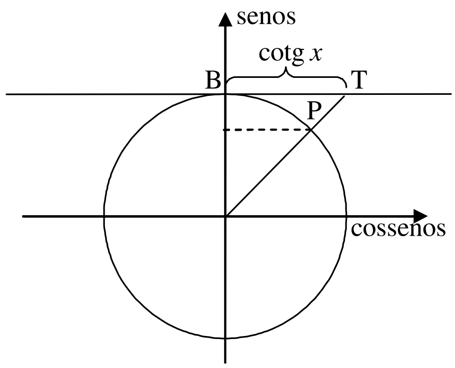
SIMETRIAS

Os pontos que são simétricos em relação à origem têm o mesmo valor de tangente, como podemos observar na figura:



COTANGENTE DE UM ARCO

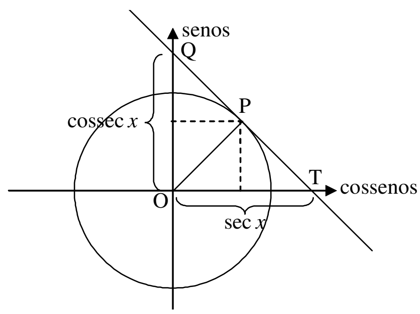
Se considerarmos a circunferência trigonométrica, o arco AP e o ponto T pertencente a um eixo paralelo ao eixo das abscissas com origem no ponto B(0,1) (eixo das cotangentes), a cotangente de x $(\operatorname{cotg} x)$ será a medida algébrica do segmento BT (a abscissa de T).



Por semelhança de triângulos concluímos que $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, com $\operatorname{sen} x \neq 0$

SECANTE E COSSECANTE DE UM ARCO

Se considerarmos a circunferência trigonométrica, o arco AP e uma reta r tangente à circunferência no ponto P, as intersecções de r com os eixos dos senos Q e cossenos T, a secante de x $(\sec x)$ será a medida algébrica do segmento OT e a cossecante $(\operatorname{cossec} x)$ será a medida algébrica do segmento OQ.



Por semelhança de triângulos concluímos que $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, com $\cos x \neq 0$ e que $\text{cossec}\ x = \dfrac{1}{\text{sen}\, x}$, com $\text{sen}\, x \neq 0$.

RELAÇÃO ENTRE SECANTE E TANGENTE

Podemos desenvolver a relação fundamental da seguinte forma

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

RELAÇÃO ENTRE COSSECANTE E COTANGENTE

Desenvolvendo de forma semelhante à relação anterior, só que agora dividindo a equação por $\text{sen}^2 x$, obtemos:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{1}{\text{sen}^2 x}$$
$$1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}\ x$$

11. REVISÃO DE ALGUMAS RELAÇÕES IMPORTANTES NA TRIGONOMETRIA

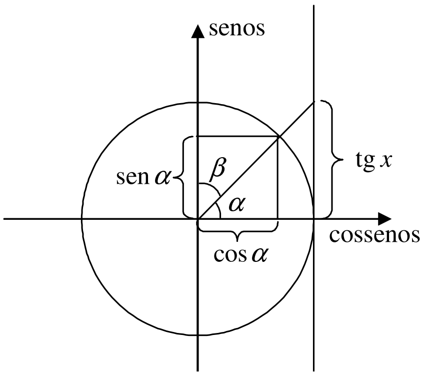
ÂNGULOS COMPLEMENTARES

Dois ângulos são complementares se a soma de suas medidas for igual a 90º.

Dados dois ângulos, α e β. Se $\alpha + \beta = 90° \Leftrightarrow \alpha$ e β são complementares.

Dados α e β complementares, valem as seguintes igualdades:

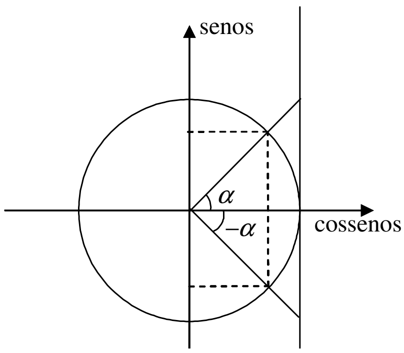
a) $\text{sen}\,\alpha = \cos\beta$
b) $\cos\alpha = \text{sen}\,\beta$
c) $\text{tg}\,\alpha = \text{cotg}\,\beta$



ÂNGULOS OPOSTOS

Dado o ângulo α, o ângulo oposto é $(-\alpha)$ e valem as seguintes igualdades:

a) $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$
b) $\cos(-a) = \cos\alpha$
c) $\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$



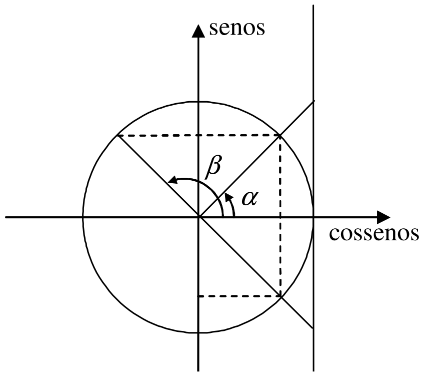
ÂNGULOS SUPLEMENTARES

Dois ângulos são suplementares se a soma de suas medidas for igual a 180º.

Dados dois ângulos, α e β. Se $\alpha + \beta = 180° \Leftrightarrow \alpha$ e β são suplementares

Dados α e β suplementares, valem as seguintes igualdades:

a) $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\beta$
b) $\cos\alpha = -\cos\beta$
c) $\text{tg}\,\alpha = -\text{tg}\,\beta$



RELAÇÃO FUNDAMENTAL

Qualquer que seja o ângulo α, sempre vale a relação:

$$\boxed{\text{sen}^2\,a + \cos^2 a = 1}$$

TANGENTE, SECANTE, COSSECANTE E COTANGENTE DE UM ÂNGULO

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha},\ \text{se}\ \cos\alpha \neq 0$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},\ \text{se}\ \cos\alpha \neq 0$$

$$\text{cossec}\ \alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha},\ \text{se}\ \text{sen}\,\alpha \neq 0$$

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha},\ \text{se}\ \text{sen}\,\alpha \neq 0$$

12. RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

SENO DA SOMA E DIFERENÇA DE DOIS ÂNGULOS

Dados dois ângulos *a* e *b*, quaisquer, a soma e diferença deles será, respectivamente:

$$\boxed{\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\cdot\cos b+\operatorname{sen} b\cdot\cos a}$$

e

$$\boxed{\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen} a\cdot\cos b-\operatorname{sen} b\cdot\cos a}$$

COSSENO DA SOMA E DIFERENÇA DE DOIS ÂNGULOS

Dados dois ângulos *a* e *b*, quaisquer, a soma e diferença entre eles será, respectivamente:

$$\boxed{\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b}$$

e

$$\boxed{\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b}$$

<u>Dica</u>: para tentar lembrar destas relações, observe a relação entre os sinais dos primeiros membros das igualdades e os dos segundos membros.

SENO E COSSENO DO ÂNGULO DUPLO

a) Dado um ângulo *a* qualquer,

$$\operatorname{sen} 2a=2\operatorname{sen} a\cdot\cos a$$

<u>Demonstração</u>:

Consideremos a expressão de $\operatorname{sen}(a+b)$. Supondo que $b=a$, então

$$\operatorname{sen} 2a=\operatorname{sen}(a+a)=\operatorname{sen} a\cos a+\operatorname{sen} a\cos a$$
$$\operatorname{sen} 2a=2\operatorname{sen} a\cos a$$

b) Dado um ângulo *a* qualquer,

$$\cos 2a=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a$$

<u>Demonstração</u>:

Consideremos a expressão de $\cos(a+b)$. Supondo $a=b$, então

$$\cos 2a=\cos(a+a)=\cos a\cos a-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} a$$
$$\cos 2a=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a$$

TANGENTE DA SOMA E DIFERENÇA DE DOIS ÂNGULOS

Dados dois ângulos quaisquer, *a* e *b*

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} a\cdot\operatorname{tg} b}\text{ e}$$

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg} a\cdot\operatorname{tg} b}$$

Conhecido o valor da $\operatorname{tg} a$, o da $\operatorname{tg} 2a$ é dado por:

$$\operatorname{tg} 2a=\frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}$$

Exemplos

1) Calcular $\cos 105^\circ$

Podemos escrever $105=135-30$, e empregando a fórmula do cosseno da diferença de dois ângulos:

$$\cos 105^\circ=\cos(135^\circ-30^\circ)$$
$$=\cos 135^\circ\cos 30^\circ+\operatorname{sen} 135^\circ\operatorname{sen} 30^\circ$$

Por sua vez, $\cos 135^\circ=-\cos 45^\circ$ e $\operatorname{sen} 135^\circ=\operatorname{sen} 45^\circ$ por serem suplementares, portanto:

$$\cos 105^\circ=-\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\operatorname{sen} 45^\circ\cdot\operatorname{sen} 30^\circ=$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$\cos 105^\circ=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\sqrt{3}+1\right)$$

2) Qual o número de soluções da equação $\operatorname{sen} x\cos^3 x+\operatorname{sen}^3 x\cos x=\frac{1}{2}$ resolvida no intervalo $0\le x<2\pi$?

Deixemos em evidência o produto $(\operatorname{sen} x\cdot\cos x)$:

$$\frac{1}{2}=\operatorname{sen} x\cos^3 x+\operatorname{sen}^3\cos x$$
$$=\operatorname{sen} x\cos x\left(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x\right)$$

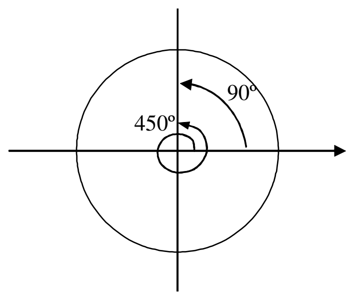
da relação fundamental, $\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x=1$, portanto:

$$\frac{1}{2}=\operatorname{sen} x\cdot\cos x$$
$$1=2\cdot\operatorname{sen} x\cdot\cos x$$
$$1=\operatorname{sen} 2x$$

Se $\operatorname{sen} 2x=1\Rightarrow 2x=90+360\cdot k$, onde $k\in\mathbb{Z}$.

Para $n=0$, $2x=90\Rightarrow x=45$
Para $n=1$, $2x=450\Rightarrow x=225$
Para $n=2$, $2x=810\Rightarrow x=405$

Portanto existem <u>duas</u> soluções no intervalo $[0,2\pi[$.



TRANSFORMAÇÃO EM PRODUTO

TRANSFORMAÇÕES DA SOMA E DIFERENÇA EM PRODUTO:

Sabemos que:

$$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}a\cdot\cos b+\operatorname{sen}b\cdot\cos a$$
$$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}a\cdot\cos b-\operatorname{sen}b\cdot\cos a$$

Somando as duas equações temos que:

$$\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)=2\cdot\operatorname{sen}a\cdot\cos b$$

Subtraindo as duas equações temos que:

$$\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b)=2\cdot\operatorname{sen}b\cdot\cos a$$

Se considerarmos que:

$$\boxed{a+b=p} \text{ e } \boxed{a-b=q}$$

então:

$$\boxed{a=\frac{p+q}{2}} \text{ e } \boxed{b=\frac{p-q}{2}}$$

Concluímos:

$$\boxed{\operatorname{sen}p+\operatorname{sen}q=2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

e

$$\boxed{\operatorname{sen}p-\operatorname{sen}q=2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$

TRANSFORMAÇÕES DA SOMA E DIFERENÇA DE COSSENOS EM PRODUTO:

Sabemos que:

$$\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b$$

Somando as duas equações temos que:

$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cdot\cos a\cdot\cos b$$

Subtraindo as duas equações temos que:

$$\cos(a+b)-\cos(a-b)=-2\cdot\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b$$

Concluímos:

$$\boxed{\cos p+\cos q=2\cdot\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

e

$$\boxed{\cos p-\cos q=-2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

Exemplos

1) Sendo $y=\operatorname{sen}75^\circ-\operatorname{sen}15^\circ$ qual o valor numérico de y?

$$y=\operatorname{sen}75^\circ-\operatorname{sen}15^\circ=$$
$$=2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\right)=$$
$$=2\cdot\operatorname{sen}30^\circ\cdot\cos45^\circ=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\boxed{\therefore\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

2) Fatore:

a) $\cos40^\circ+\cos10^\circ$

$$\cos40^\circ+\cos10^\circ=$$
$$=2\cdot\cos\left(\frac{40^\circ+10^\circ}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{40^\circ-10^\circ}{2}\right)=$$
$$=2\cdot\cos25^\circ\cdot\cos15^\circ$$

b) $\operatorname{sen}25^\circ-\operatorname{sen}1^\circ$

$$\operatorname{sen}25^\circ-\operatorname{sen}1^\circ=$$
$$=2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{25^\circ-1^\circ}{2}\right).\cos\left(\frac{25^\circ+1^\circ}{2}\right)=$$
$$=2\cdot\operatorname{sen}12^\circ\cdot\cos13^\circ$$

GABARITO GERAL - PARTE I
(FRENTES UM, DOIS e TRÊS)

FRENTE UM

CAPÍTULO 1

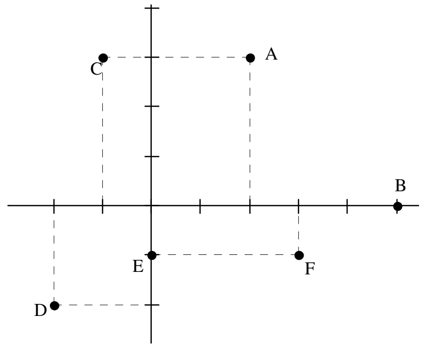
1. a) $S=\{1\}$ b) $S=\{3\}$ c) $S=\{-5\}$
d) $S=\left\{\frac{8}{11}\right\}$ e) $S=\{0\}$ f) $S=\left\{\frac{13}{8}\right\}$
g) $S=\{0\}$ h) $S=\left\{\frac{14}{5}\right\}$

2. b) $S=\{2b+a\}$ c) $S=\left\{\frac{3b+a}{2}\right\}$
d) $S=\left\{\frac{abc}{b-a}\right\}$ e) $S=\{b-a, -b-a\}$

3.E 4.E 5.B 6.C
7. m= –3
8. 21, 22 e 23
9. 6
10.C 11.B 12.C 13.E
14. a) $S=\{-2, 2\}$ b) $S=\{-3, 3\}$ c) $S=\{0, 1\}$
d) $S=\{0, 10\}$ e) $S=\{-2, -1\}$ f) $S=\{2, 3\}$
g) $S=\{-3, -2\}$ h) $S=\{-3, 4\}$ i) $S=\left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$
j) $S=\left\{-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$ k) $S=\left\{-1, \frac{4}{3}\right\}$ l) $S=\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right\}$
15. 10 e 11
16. a) $S=\{x\in\Re / x\ge \frac{16}{3}\}$ b) $S=\{x\in\Re / x< \frac{4}{3}\}$
c) $S=\{x\in\Re / x\ge 2\}$ d) $S=\{x\in\Re / x> \frac{2}{5}\}$
e) $S=\{x\in\Re / x< \frac{3}{7}\}$ f) $s=\Re$ g) $S=\varnothing$
17.D 18.C 19.D 20.A
21. a)3 b) $\frac{1}{2}$ c)6 d)8
22. D 23. D 24. D 25. C
26. a) $S=\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$ b) $S=\{-2,1\}$
c) $S=\{-2\sqrt{2},-2,2,2\sqrt{2}\}$
27. a) $(x-1)(x-2)$ b) $2(y-1)(y+3)$
c) $(a-2)(a-5)$ d) $(bc+2)(bc-3)$
28. a) $(x-3)$ b) $\frac{2(x-4)}{x+4}$

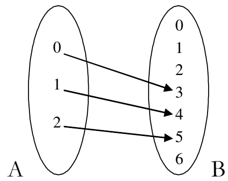
CAPÍTULO 2

1.



2. i)A,B e C ii)E e B ou F, C e D iii)E iv)E e B

3. Sim, f é uma função de A em B.



4. B

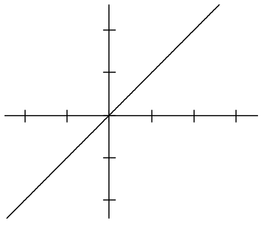
5. a) Dom $=\{-1,0,2\}$ b) $f(-1)=1$ c) $f(0)=2$
d) $f(2)=4$ e) Im $=\{1,2,4\}$ f) $f(x)=x+2$

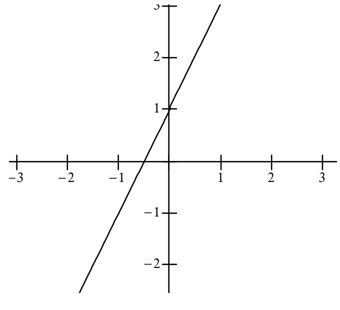
6. a) Im $=\{0,1,4\}$ b) Im $=\{-2,0,2,4\}$ c) Im $=\{-1,0,3\}$

7. a)1 b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

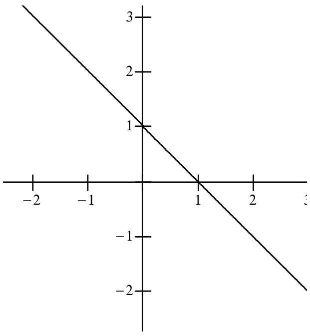
8. a)crescente

b) crescente

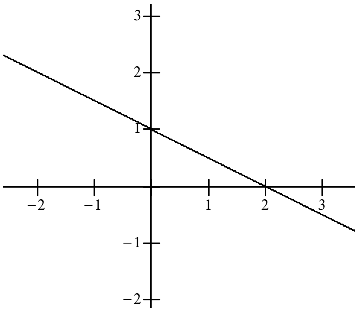




c) decrescente



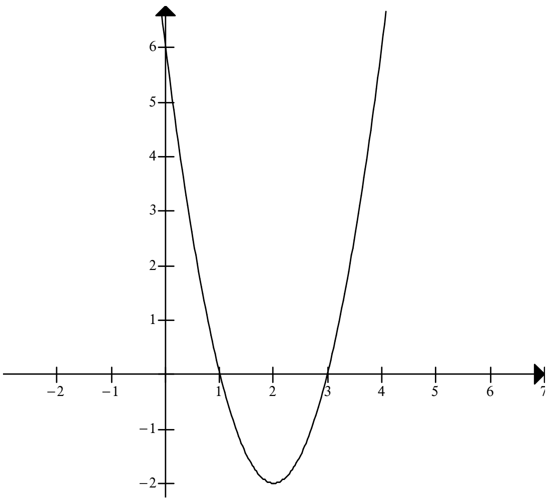
d) decrescente



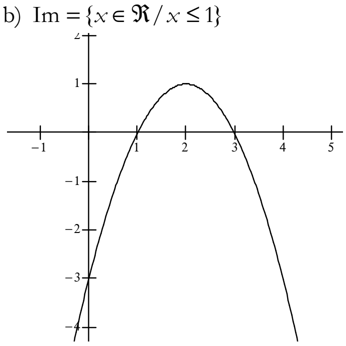
9. a) –3 b) 2 c) $-\frac{1}{3}$ d) 3 e) 2 f) $\frac{2}{3}$

10.a) $f(x)<0$ se x < 2; $f(x)=0$ se x = 2; $f(x)>0$ se x > 2.
b) $f(x)<0$ se x > –2; $f(x)=0$ se x = –2; $f(x)>0$ se x <–2.
c) $f(x)<0$ se x<–1/2; $f(x)=0$ se x=–1/2; $f(x)>0$ se x>–1/2.
d) $f(x)<0$ se x > 6; $f(x)=0$ se x = 6; $f(x)>0$ se x < 6.

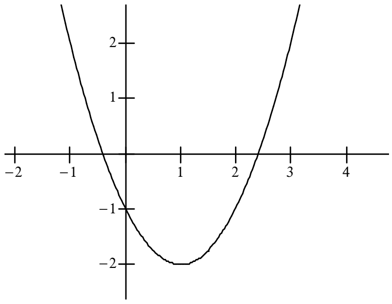
11. a) $\text{Im}=\{x\in\Re / x\geq -2\}$



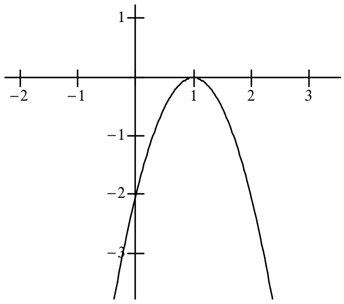
b) $\text{Im}=\{x\in\Re / x\leq 1\}$



c) $\text{Im}=\{x\in\Re / x\geq -2\}$



d) $\text{Im}=\{x\in\Re / x\leq 0\}$



12. $y=\frac{5}{3}x^2-\frac{20}{3}x+5$

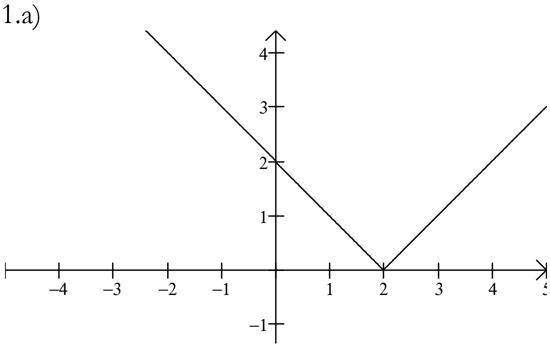
13. a) $S=\Re-\{\frac{1}{2}\}$
b) $S=\{x\in\Re / -1\leq x\leq 1\}$
c) $S=\{x\in\Re / x\leq 0\_ou\_x\geq 3\}$
d) $S=\{x\in\Re / x<0\_ou\_x>1\}$
e) $S=\{x\in\Re / x\leq -1\_ou\_x\geq 2\}$
f) $S=\{x\in\Re / \frac{1}{2}\leq x\leq 1\}$
g) $S=\Re$
h) $S=\varnothing$

14. a) $S=\{x\in\Re / x\leq -1\_ou\_\frac{1}{2}\leq x\leq 1\}$
b) $S=\{x\in\Re / x<-2\_ou\_-2<x<0\_ou\_x>1\}$
c) $S=\{x\in\Re / x\leq -1\_ou\_0\leq x\leq 1\}$

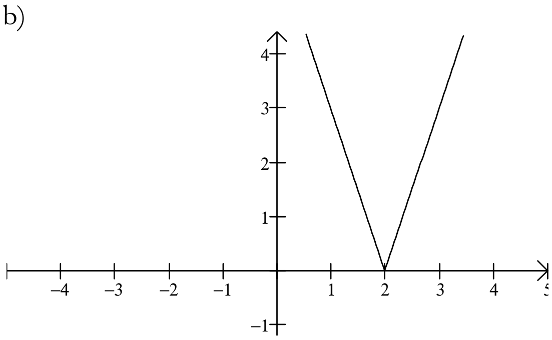
15. B

CAPÍTULO 3

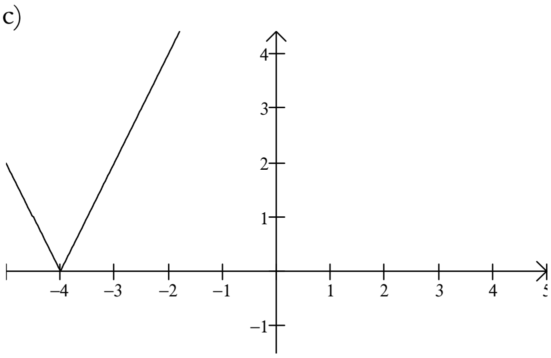
1.a)



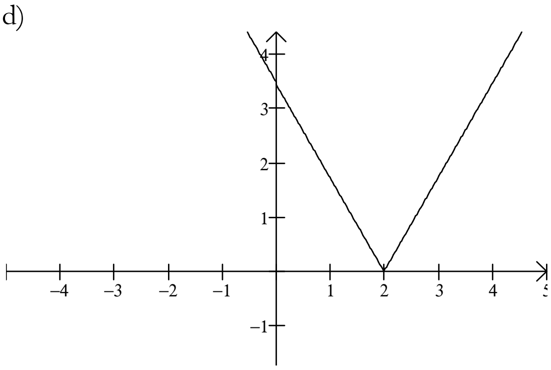
b)


4
3
2
1
−1
−4 −3 −2 −1 1 2 3 4

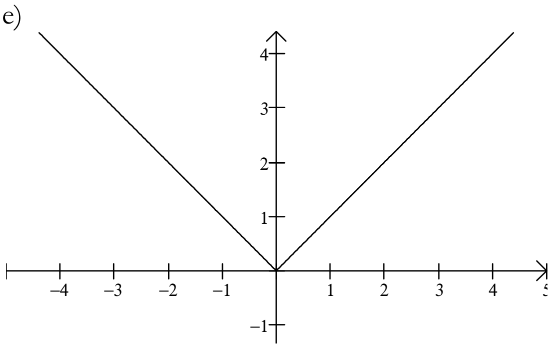
c)


4
3
2
1
−1
−4 −3 −2 −1 1 2 3 4

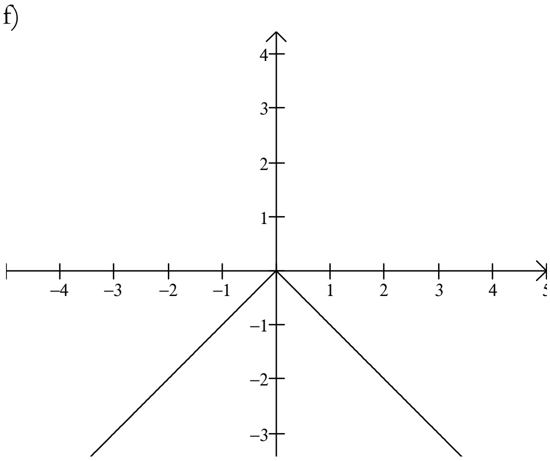
d)


4
3
2
1
−1
−4 −3 −2 −1 1 2 3 4

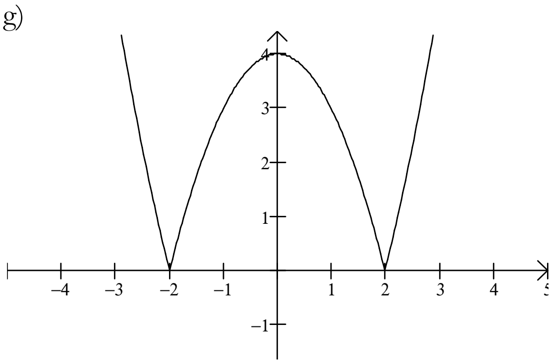
e)


4
3
2
1
−1
−4 −3 −2 −1 1 2 3 4

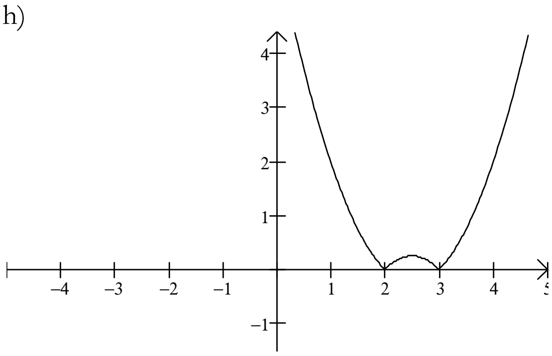
f)


4
3
2
1
−1
−2
−3
−4 −3 −2 −1 1 2 3 4

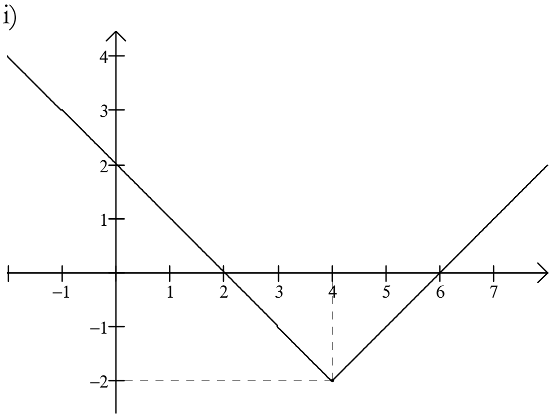
g)



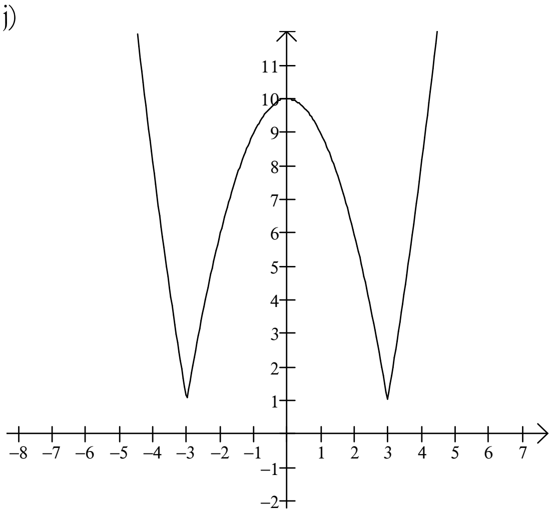
h)



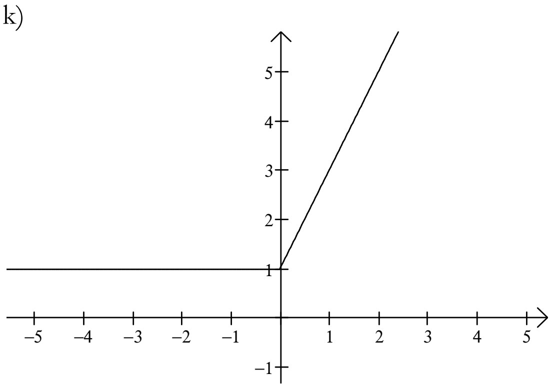
i)



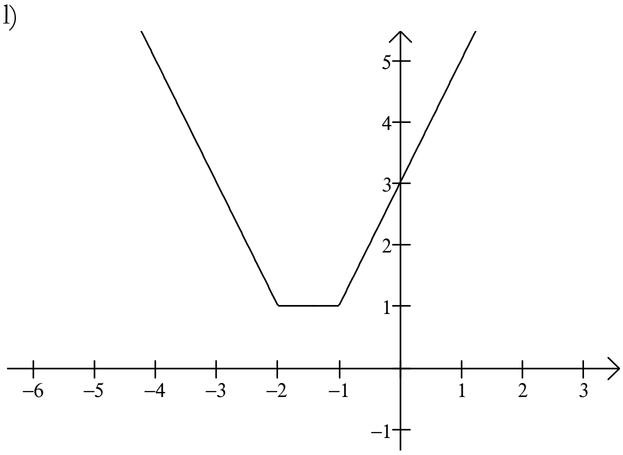
j)



k)



l)

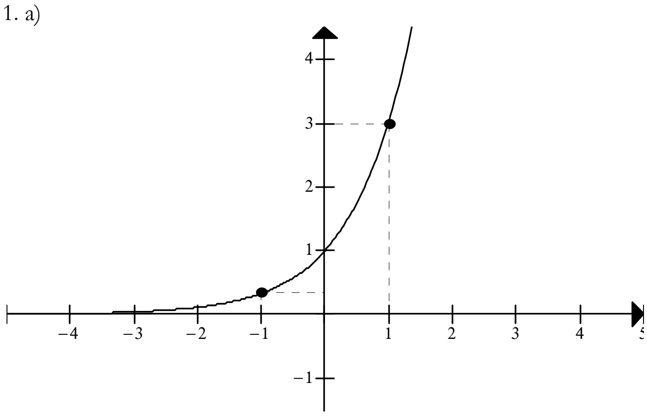


2. a) $S = \{-5,5\}$ b) $S = \{-2,4\}$ c) $S = \{-3,11\}$ d) $S = \{-6,3\}$
e) $S = \{-1,1\}$ f) $S = \{x \in \Re / x \geq 0\}$

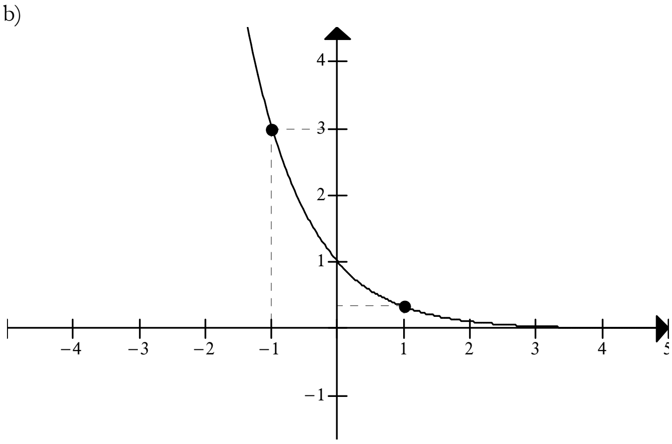
3.A 4.B 5.E 6.B 7.D 8.C 9.C 10. C
11. A 12. E 13. D 14. D

CAPÍTULO 4

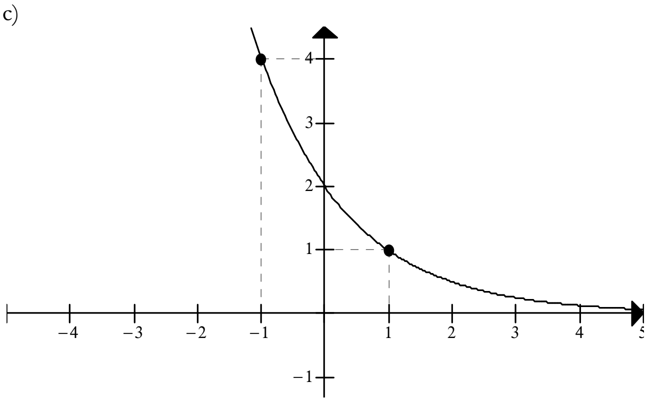
1. a)



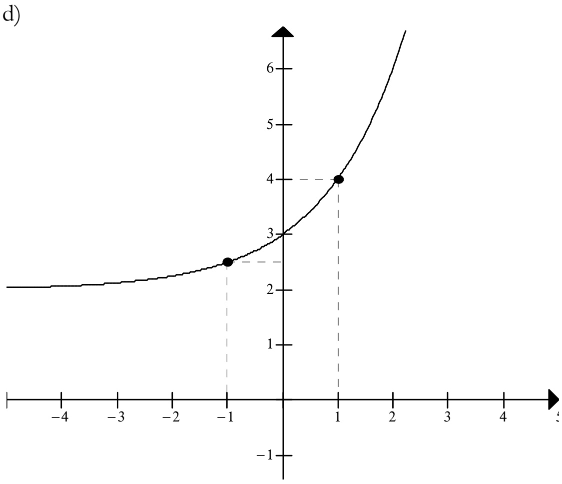
b)



c)



d)



2.B 3.C

4.C 5.C

6. a) $S=\{8\}$

b) $S=\{-3\}$

c) $S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

d) $S=\left\{\dfrac{8}{3}\right\}$

e) $S=\{-4,4\}$

7. a) $S=\left\{-\dfrac{4}{5}\right\}$

b) $S=\{-2,3\}$

c) $S=\left\{\dfrac{4}{3}\right\}$

8.C; 9.D; 10.B; 11.A; 12.A;

13.a) $S=\{x\in\Re / x<1\}$

b) $S=\{x\in\Re / x\le\dfrac{3}{2}\}$

c) $S=\{x\in\Re / 1<x<2\}$

d) $S=\{x\in\Re / x\le 2\}$

e) $S=\{x\in\Re / x\le -1\_ou\_x\ge 0\}$

CAPÍTULO 5

1.D 2.E 3.E 4.C 5.E 6.E
7. 0,62
8.E 9.B 10.D 11.E 12.C
13. a) $S=\{5\}$ b) $S=\{3\}$ c) $S=\{3\}$ d) $S=\{2,3\}$
14.E 15.D 16.E 17.E 18.E 19.C 20.A 21.E 22.C 23.A 24.E 25.C 26.C

CAPÍTULO 6

1. $a_{22}=6, a_{24}=8, a_{42}=16,$
$a_{31}=10, a_{23}=7, a_{32}=11,$
$a_{14}=3$

2. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 11 \\ 6 & 9 & 14 \end{bmatrix}$

3. a) $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & -14 \\ -11 & -2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 9 & -7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} -1 & 14 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$

4. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

5.A 6.D 7.D
8. a= – 3, b= – 4, c= – 4

9;. $X=\begin{pmatrix} \dfrac{9}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix} \dfrac{-5}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$

10.A 11.E 12.B 13.C 14.B 15.D 16.D 17.C 18.D

CAPÍTULO 7

1.E 2.C 3.D 4.D 5.B 6.C 7.E
8.–12 9.B 10.a)16 b)32 11.A

CAPÍTULO 8

1.B 2.B 3.D 4.2000 maçãs, 3000 peras e 5000 laranjas
5. a) $S=(2,3)$ - sistema possível e determinado
b) $S=(5,1,2)$ - sistema possível e determinado
c) $S=(1,0,-1)$ - sistema possível e determinado
d) $S=(-3,2,0,1)$ - sistema possível e determinado
e) $S=(x,3,x+1)$ - sistema possível e indeterminado
f) $S=(3y,y,1-y)$ - sistema possível e indeterminado
g) Sistema Impossível

6. a) $S=(3,1)$ b) $S=\left(\frac{4b-a}{4a-b},\frac{a^2-b^2}{4a-b}\right)$ c) $S=(1,2,3)$
d) $S=(1,-2,-2)$ e) $S=(2,-1,3)$ 7. C

CAPÍTULO 9

1. $a)(5,9,13,17,21,25)$ $b)(0,-4,-12,-24,-40,-60)$
$c)(-4,3,22,59,120,211)$ $d)(0,3,8,15,24,35)$
$e)(10,11,12,13,14,15)$ $f)(-1,1,-1,1,-1,1)$
$g)\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,2,4,8\right)$

2.A 3.C 4.D 5.B

6.a)V , r = 0 b)V , r = – 4
c)V , r = – 0,3 d)V , r = x e)F

7. a) V b)F c)F 8.C 9.D

10. B 1.C 12.A 13.B 14.B 15.A

16. E 17.64 18.B 19.D

20. -5

21. (1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37)

22. (6 cm, 8 cm e 10cm)

23.A 24.A 25.B 26.D 27.A 28.B 29.E 30.E 31.B 32.B

33.B 34.A 35.C 36.A 37.A 38.D 39B 40.B 41.C 42.A

43.D 44.A 45.E 46.D 47.D 48.C 49.D

FRENTE DOIS

CAPÍTULO 1

1. a)8 b)100000 c)9 d)–9 e) $\frac{125}{64}$ f) $\frac{81}{10000}$ g)0,008 h) $\frac{1}{27}$
i)1 j)1

2. a)3 b)25 c) $\frac{1}{7}$ d) $\sqrt[3]{6}$

3. a) $9\sqrt{3}$ b) $6\sqrt{2}$ c) $\frac{2}{9}$ d) $\sqrt[4]{3}$ e) $\sqrt[6]{5}$

4. F, V, V, F, V 5. a) $5\sqrt{5}$ b)2 c)5 6.C 7. C 8. D

9. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{2\sqrt{5}}{15}$ 10. a)1 b) $\frac{9}{2}$ 11. D

12.a) $x^2+2xy+y^2$ b) x^2+6x+9 c) $4+12x+9x^2$ d) $9a^2-6a+1$
e) a^2-9 f) x^2-4 g) $x^2-2xyzw+y^2z^2w^2$ h) $a^4+2a^2b^2c+b^4c^2$

13.b)1575 c)9951

14.a) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
b) $x^3-6x^2+12x-8$ c) $x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$ d) $8a^3-12a^2x+6ax^2-x^3$

15. a) $xy^2z\left(z^2+x^2\right)$ b) $(b+1)(a+1)$
c) $b(a+c)(a-c)$ d) $(x+y)^2$ e) $-(a-b)^2$) $(z+2w)^2$ g) $2c(a+b)^2$ 16.
a) $(s-t)\left(s^2+st+t^2\right)$
b) $(2x-y)\left(4x^2+2xy+y^2\right)$ c) $(a-4)\left(a^2+4a+16\right)$
d) $\left(x^2-y\right)\left(x^4+x^2y+y^2\right)$ 17. a) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ b) $\frac{7}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$

CAPÍTULO 2

1.a) 60 b) 2% c) 20%
2.D 3.C 4.B
5.a)2662 b) 33,1%
6.B 7.C 8.E 9.D 10.A 11.D 12.A 13.C 14.A

CAPÍTULO 3

1.14 2.15 3.4 4. D 5. (Demonstração)
6. AB = 35cm e DF + EF = 10 cm 7. 210 cm
8. a) LV = 2 b) LT = $2\sqrt{7}$ 9. 9, 15 e 18
10. AD = 6 cm, DE = 4 cm e $\frac{FA}{FB}=\frac{1}{3}$ 11. D 12. B

CAPÍTULO 4

1. $a\sqrt{2}$ 2. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
3. $5a$, $12a$, $13a$ tal que $a \in \Re$ e $0 < a \le \frac{60}{13}$
4. 4 dm 5. $2-\sqrt{2}$ 6. $3\sqrt{6}$ 7. 24 cm
8. E
9. 9
10. B 11. B 12. C
13. 24 cm 14. $\frac{12}{7}$

CAPÍTULO 5

1. 27
2.Heptágono
3.C 4.C 5.B 6.E 7.C
8.20 diagonais
9.D 10.C 11.B 12.E 13.A 14.D 15.E

CAPÍTULO 6

1. V, F, F, V, V
2. C 3.E 4. B 5.D 6.A 7.A 8.A 9.B
10. a) 32 e 16 cm b) 64 e 16 cm2
11.D 12.B 13.E 14. C

CAPÍTULO 7

1.Demonstração 2. S = 14
3.A 4.B 5.C 6.A 7.D 8.C 9.A 10.A 11.E 12.B 13.C 14. A

CAPÍTULO 8

1. Gráfico 2. $a=-\frac{1}{2}$ 3. 4º quadrante 4. $m=-1$
5. 1º quadrante 6. $M(2,6), M\left(\frac{1}{2},3\right), M\left(-3,-\frac{1}{2}\right)$
7. $(3,5)$ 8. $(1,3)$ 9. $D(5,5)$ 10. $(4,10)$ e $(8,15)$
11. $\left(\frac{1}{2},5\right),(1,6)$ e $\left(\frac{3}{2},7\right)$ 12. $C\left(\frac{5}{3},10\right)$ 13. $10, 2\sqrt{2}, \sqrt{5}$ e 3 14. $10+5\sqrt{2}$
15. $\alpha=4$ ou $\alpha=-2$

CAPÍTULO 9

1. I) 0º II) 45 III) 90º IV) 135º V) 135 VI) 150
2.110 3. $m_{AB}=0, m_{AC}=\sqrt{3}$ e $m_{BC}=-\sqrt{3}$
4. $m_{AB}=0, m_{BC}=1, \nexists\, m_{CD}$ e $m_{DE}=-1$
5. a) sim b) sim 6. a) 3 b) 9 7. $m_{AB}=m_{BC}=2$ 8. $\frac{160}{3}, 40, \frac{80}{3}$
9. E 10. A 11. C 12. $P=5+2\sqrt{2}+\sqrt{29}$ $S=7$
13. 8 14.A 15. $a \ne 4$ e $a \ne -1$

CAPÍTULO 10

1. equação geral: $2x - y - 3 = 0$
   equação reduzida: $y = 2x - 3$

2. B 3. A 4. C 5. $\lambda = 3$ 6. B 7. C 8. A 9. A 10. B
11. C 12. D 13. D 14. A 15. $2m + 3n = 0$ 16. C

17. C 18. A 9.B 20. D 21. $\dfrac{x}{\frac{1}{2}} + \dfrac{y}{1} = 1$

22. C 23. a) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{12}{5} = \dfrac{15-24}{10} = -\dfrac{9}{10} = -0{,}9$ b) $4x - y = 0$

24. $\dfrac{4-\pi}{8}$ 25. A

CAPÍTULO 11

1. A 2. A 3. A 4. a) $y = 2x - 1$ b) $y = -2x - 3$

c) $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$ 5. a) $x - y + 6 = 0$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}x - y + 6 + \dfrac{4\sqrt{3}}{3} = 0$

c) $\sqrt{3}x + y - 3\sqrt{3} + 1 = 0$ 6. C 7. B 8. B 9. E 10. C 11. A 12. C

13. A 14. D 15. $(2,3)$

CAPÍTULO 12

1. a) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 7 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 8y - 65 = 0$ 2. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 131 = 0$ $A = 80\pi$

3. C 4. E 5. * 6. A 7. * 8. A 9. C 10. B 11. B 12. D

13. E 14. a) $y = x$ b) $M\left(\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}, \dfrac{4+\sqrt{2}}{2}\right)$

FRENTE TRÊS

CAPÍTULO 1

1. b) $\frac{7}{9}$; c) $\frac{4}{33}$; d) $\frac{277}{999}$; e) $\frac{53}{9}$; f) $\frac{116}{33}$; g)1

2.C 3.E

4. a) $[1,\ 7[$; b) $]3,\ 5]$

5.C 6.D 7.C

CAPÍTULO 2

1. V, V, V, V, F, F, V, F, F
2. 10º
3. 40º e 80º
4. a) 65º e 155º b) 43º e 133º c) 52º35` e 142º35`
   d) 18º e 108º e) não existe o complemento e 39º
   f) não existe o complemento e 86º45`
5. 67º30'
6. 72º
7. 36º
8. 70º

CAPÍTULO 3

1. $15\sqrt{3}\,m$
2. $40\sqrt{3}\,m$
3. 129,75 m
4.B 5.B
6. $\frac{4}{9}$ ou $\frac{9}{4}$
7. $360\sqrt{3}\ \ m$
8.B 9.C

CAPÍTULO 4

1. 12
2. a) $\frac{20}{3}$ b) 9
3. 28
4.A
5. 24 m, 33 m e 40 m
6. 6, 8 e 14]
7. $\frac{160}{3}$, 40, $\frac{80}{3}$

CAPÍTULO 5

1. II e III, I, III, IV e I
2.D 3.A
4. 90º
5. 105 - D é a intersecção de $\overline{AM}$ e $\overline{NC}$
6.D
7. 80º
8. 5 cm

CAPÍTULO 6

1. $\frac{3}{5}$
2.E
3. 1
4.D
5. a) 6 b) 4
6. a) 7 b) 4
7. a) 6 b) 9
8. 2 cm
9. ANULADA
10. $6\sqrt{6}$
11. 2

CAPÍTULO 7

1. $\sqrt{13}\ \ cm$
2. a) $\overline{BC} = 7cm$
   b) proj de $\overline{AC}$ sobre $\overline{AB}$ é 2,5cm
3.A 4.B 5.C
6. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}\ -\ 1\right)\ cm$
7. 70 m
8. $2\sqrt{3}\ \ cm$
9. 4
10.A 11.A 12.A
13. $4\sqrt{7}$ m e $4\sqrt{19}$ m

CAPÍTULO 8

1.A 2.D 3.E
4.a) 84 cm²
   b) 8 cm
5.B 6.A 7.D 8.C 9.A 10.B
11. a = b = 4 m
12.C
13. $r^2 \cdot sen(2\beta)\, e\, \beta = 45º$
14. 16/65
15. a) 30 cm²
   b) 2 cm

CAPÍTULO 9

1. 8 cm
2.C 3.C 4.D 5.E 6.A 7.C 8.A 9.A 10.C 11.D 12.C

CAPÍTULO 10

1. a) 330º
   b) 600º
2. a) $\frac{3\pi}{2} rad$
   b) $\frac{2\pi}{3} rad$
3.C 4.D 5.D 6.A 7.D
8. a) sen 830º
   b) cos 190º
9.A

Matemática

Parte II

ÍNDICE DE MATEMÁTICA - PARTE II (FRENTES UM, DOIS E TRÊS)

FRENTE UM

****

FRENTE DOIS

****

FRENTE TRÊS

****

FRENTE UM

1. ANÁLISE COMBINATÓRIA

FATORIAL

Definição: seja n um número natural, indicamos o fatorial de n por $n!$ e o definimos como sendo:

- Se $n \geq 2$, então $n! = n(n-1)(n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1$
- Se $n = 1$, então $1! = 1$.
- Se $n = 0$, então $0! = 1$

Exemplo

1) Calcule:

a) $\dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$

b) $\dfrac{117!}{115!} = \dfrac{117 \cdot 116 \cdot 115!}{115!} = 117 \cdot 116 = 13572$

c) $\dfrac{31!}{32!} = \dfrac{31!}{32 \cdot 31!} = \dfrac{1}{32}$

d) $\dfrac{7! + 5!}{4!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4! + 5 \cdot 4!}{4!} = \dfrac{4!(7 \cdot 6 \cdot 5 + 5)}{4!} = 215$

e) para $n > 1$, $\dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

EXERCÍCIOS

1. Calcule:

a) $6! - 5! =$

b) $\dfrac{5! - 4!}{4!} + (1-1)! =$

c) $\dfrac{7!}{6!} + \dfrac{6!}{7!} =$

2. Simplifique:

a) $\dfrac{(n+3)!}{(n+2)!} =$

b) $\dfrac{n!(n-1)!}{\left[(n-1)!\right]^2} =$

c) $\dfrac{(n-5)!}{(n-4)!} =$

d) $\dfrac{n! - (n-1)!}{(n-1)! + (n-2)!}$

3. (CESGRANRIO) Se $a_n = \dfrac{n!(n^2-1)}{(n+1)!}$, então a_{1984} é igual a:

a) $\dfrac{1}{1985}$

b) 1984

c) 1983

d) $\dfrac{1985}{1984^2 - 1}$

e) $\dfrac{1984^2 - 1}{1984}$

4. (UFRN) Se $(x+1)! = 3(x!)$, então x é igual a:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Considere a seguinte situação: um rapaz tem duas camisetas (uma amarela e uma azul), duas calças (uma branca e uma azul) e dois sapatos (um marrom e outro preto), de quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?

$$\text{camiseta amarela}\begin{cases}\text{calça branca}\begin{cases}\text{sapato marrom}\\ \text{sapato preto}\end{cases}\\ \text{calça azul}\begin{cases}\text{sapato marrom}\\ \text{sapato preto}\end{cases}\end{cases}$$

$$\text{camiseta azul}\begin{cases}\text{calça branca}\begin{cases}\text{sapato marrom}\\ \text{sapato preto}\end{cases}\\ \text{calça azul}\begin{cases}\text{sapato marrom}\\ \text{sapato preto}\end{cases}\end{cases}$$

Logo, ele tem $2 \times 2 \times 2 = 8$ maneiras diferentes de se vestir. Então para saber o número de maneiras distintas, temos que multiplicar a quantidade de opções que temos.

Esta forma de representação das maneiras que ele pode se vestir é chamada de *diagrama de árvore*.

Exemplos

1) Tendo os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9 podemos formar quantos números de três algarismos distintos?

Para escolher o algarismo das centenas temos 9 possibilidades.

Para escolher o algarismo das dezenas teremos então 8 possibilidades pois um algarismo deles já foi utilizado para a centena.

E por último, para o algarismo das unidades teremos 7 possibilidades restantes.

Chegamos à conclusão que há $9 \times 8 \times 7 = 504$ números de três algarismos distintos.

2) A 1º fase da FUVEST consta de 12 questões de Matemática sendo que cada uma tem 5 alternativas. De quantas maneiras diferentes esta prova pode ser respondida?

1º questão $\rightarrow$ 5 possibilidades
2º questão $\rightarrow$ 5 possibilidades
.
.
.
12º questão $\rightarrow$ 5 possibilidades

Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem podemos dizer que existem $\underbrace{5 \times 5 \times 5 \times ... \times 5}_{12\text{ fatores}} = 5^{12} = 244140625$ possibilidades diferentes.

3) Alguns amigos decidiram ir para um baile e compareceram 17 mulheres e 12 homens, sabendo que todos os homens dançaram com todas as mulheres, quantos pares foram formados?

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, sabemos que foram formados $17\times12=204$ pares.

4) Quantos números de três algarismos podemos formar utilizando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5?

Não podemos colocar o 0 no lugar do algarismo das centenas pois se assim fizermos teremos um número de dois algarismos, então temos 5 possibilidades de algarismos para ocupar tal lugar.
Para o algarismo das dezenas e o das unidades teremos 6 possibilidades (para cada um), então:

$$5\times6\times6=180$$

Logo, existem 180 números de três algarismos formados com os algarismos citados.

EXERCÍCIOS

5. (FGV) Um restaurante oferece no cardápio 2 saladas distintas, 4 tipos de pratos de carne, 5 variedades de bebidas e 3 sobremesas diferentes. Uma pessoa deseja uma salada, um prato de carne, uma bebida e uma sobremesa. De quantas maneiras a pessoa poderá fazer seu pedido?
a) 120
b) 144
c) 14
d) 60
e) 12

6. (UFRN) A quantidade de números pares de 5 algarismos, sem repetição, que podemos formar com os dígitos 2,3, 4, 5, 6, 7 e 8 é igual a:
a) 720
b) 1440
c) 2160
d) 2880
e) 3600

7. (MACKENZIE) Usando-se 5 dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, e sem repeti-los, podemos formar:
a) 1080 números pares.
b) 2160 números pares.
c) 2520 números pares.
d) 5040 números pares.
e) 360 números pares.

8. (EAESP-FGV) Usando os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9, existem x números de 4 algarismos de modo que pelo menos 2 algarismos sejam iguais. O valor de x é:
a) 505 b) 427 c) 120 d) 625 e) 384

ARRANJOS

Definição: arranjo dos n elementos tomados k a k, é uma sequência ordenada de $k(k\le n)$ elementos de um conjunto com n elementos.
Já tivemos uma noção de arranjo quando vimos o Princípio Fundamental da Contagem e entenderemos melhor no seguinte exemplo:
Em uma corrida que tem 10 atletas, os 3 primeiros serão contemplados com algum prêmio e subirão ao pódio, quantas maneiras diferentes existem de se compor este pódio?
Qualquer um dos 10 atletas poderá chegar em primeiro lugar, depois de já estar decidido este primeiro colocado haverá 9 atletas na disputa do 2º lugar, e da mesma forma, haverá 8 atletas para o 3º lugar, então:

$$10\times9\times8=720$$

Logo, há 720 maneiras diferentes de se compor o pódio.
Podemos escrever da seguinte forma:

$$A_{10,3}=10\cdot9\cdot8=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{10!}{7!}=\frac{10!}{(10-3)!}$$

Então, se tivermos n atletas e o pódio possuir k lugares, teremos:

$$A_{n,k}=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}{(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}=$$
$$=\frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\boxed{A_{n,k}=\frac{n!}{(n-k)!}}$$

PERMUTAÇÕES

Definição: permutação dos n elementos é um arranjo dos n elementos tomados n a n.
Indicamos por P_n, o número de permutações de n elementos e calculamos assim:

$$\boxed{P_n=n!}$$

EXERCÍCIOS

9. (UNIFOR) O segredo de um cofre é constituído de duas letras distintas (escolhidas entre as 23 do alfabeto) e três algarismos distintos (escolhidos de 0 a 9) . Sabendo-se que a letra da esquerda é uma vogal e que o algarismo da direita é divisível por 5, qual é o número máximo de tentativas que podem ser feitas para se abrir esse cofre?
a) 15840
b) 18840
c) 31680
d) 37680
e) 63360

10. (UFMG) Duas das 50 cadeiras de uma sala serão ocupadas por dois alunos. O número de maneiras distintas possíveis que esses alunos terão para escolher duas das 50 cadeiras, para ocupá-las, é:
a) 1225
b) 2450
c) 2^{50}
d) 49!
e) 50!

11. (FUVEST) Num programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas 10 músicas, mas nunca na mesma ordem. Para esgotar todas as possíveis sequências dessas músicas, serão necessários aproximadamente:
a) 100 dias
b) 10 anos
c) 1 século
d) 10 séculos
e) 100 séculos

12. (UCMG) Uma prova de Matemática contém 30 questões do tipo "múltipla escolha", tendo cada questão cinco alternativas. Se todas as questões forem respondidas ao acaso, o número de maneiras de preencher a folha de respostas é:
a) 5^{30}
b) 30^{5}
c) 2^{30}
d) 150
e) 60

13. (UFV) Seis pessoas em fila gastam 10 segundos para mudarem de ordem. O tempo necessário para todas as mudanças possíveis é:
a) 4h b) 2h c) 3h d) 5h e) 6h

14. (FUVEST) O número de anagramas da palavra FUVEST que começam e terminam por vogal é:
a) 24 b) 48 c) 96 d) 120 e) 144

15. (UFPA) Usando os algarismos do conjunto $\{2,6\}$ podemos formar n números de 4 algarismos. Logo, n é igual a:
a) 0 b) 2 c) 4 d) 12 e) 16

16. (CESCEA) Um automóvel é oferecido pelo fabricante em 7 cores diferentes, podendo o comprador optar pelos motores 2000cc e 4000cc. Sabendo-se que os automóveis são fabricados nas versões Standard, luxo e superluxo, quantas são as alternativas para o comprador?
a) 14 b) 41 c) 42 d) 12 e) 16

2. PROBABILIDADE

INTRODUÇÃO

A teoria da probabilidade tem suas origens no início do século XVII e foi resultado de cálculos em diversos jogos de azar, mas só foi sistematizado nas décadas de 20 e 30 do século XX recebendo a denominação de Teoria da Probabilidade e ganhando consistente fundamentação matemática.

Juntamente com a Estatística, a Teoria da Probabilidade se tornou indispensável em quase todas as áreas do conhecimento, como por exemplo, na Física, Química, Biologia, Medicina, Psicologia, Sociologia, Ciências Políticas, Educação, Economia, Administração, Computação e em todos os campos da Engenharia.

O resultado de experimentos para saber com que velocidade uma pedra atingirá o solo após uma queda livre ou para saber com que temperatura o leite ferve podem ser previstos, isto é podem ser determinados antes da sua realização e por isso são denominados experimentos determinísticos. Já em outras ocasiões não podemos determinar qual será o resultado, por exemplo, se jogarmos uma moeda teremos cara ou coroa? Se lançarmos um dado, qual a face que estará voltada para cima? Estas duas últimas situações estão sujeitas à lei do acaso e chamamos de experimentos aleatórios.

Como não é possível prever resultados de experimentos aleatórios, procuraremos descobrir as possibilidades de sua ocorrência.

A teoria das probabilidades estuda a forma de estabelecer as possibilidades de ocorrência de cada experimento aleatórias equiprováveis, ou seja, com a mesma chance de ocorrer.

ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTOS

Espaço amostral ou conjunto universo é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório e podemos indicá-lo por $(\cup, \delta \text{ ou } \Omega)$

Exemplos

Joga-se uma moeda lê-se a figura da face voltada para cima, indicando cara por C e coroa por R:

$$\delta = \{C, R\}$$

Lançamento de um dado:

$$\delta = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Sorteio das dezenas da loto:

$$\delta = \{00,01,02,03,...,98,99\}$$

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral.

Exemplo:

Uma urna contém 4 bolas pretas e 4 bolas vermelhas. Dessa urna são retiradas sucessivamente, 2 bolas

1º bola	2º bola	resultado
P	P V	PP PV
V	P V	VP VV

O espaço amostral será:

$$\delta = \{(PP),(PV),(VP),(VV)\}$$

Alguns eventos:

evento 1: duas bolas de mesma cor $A = \{(PP),(VV)\}$

evento 2: duas bolas de cores diferentes $B = \{(PV),(VP)\}$

evento 3: pelo menos uma bola preta $C = \{(PP),(PV),(VP)\}$

TIPOS DE EVENTOS

Considere o experimento aleatório: lançamento de um dado não viciado e a face voltada par cima.

- Espaço amostral será: $\delta = \{1,2,3,4,5,6\} = \delta \Rightarrow A = \delta$

- Evento certo: é o próprio espaço amostral.

Exemplo: considere o evento A, a possibilidade de ocorrência de um número menor ou igual a 6.

- Evento impossível: é o subconjunto vazio do espaço amostral.

Exemplo: Considere o evento A, a possibilidade de ocorrência do número 8.

$\delta = \varnothing$, já que o número 8 não faz parte do espaço amostral.

- Evento União: é a reunião de dois eventos

Considere o evento A, a possibilidade de ocorrência de um divisor de 6, evento B a possibilidade de um quadrado perfeito e A ∪ B, a possibilidade de ocorrência de divisor de 6 ou de um quadrado perfeito.

$$A = \{1,2,3,6\}$$
$$B = \{1,4\}$$
$$C = \{1,2,3,4,6\}$$

- Evento intersecção : é a intersecção de dois eventos

Exemplo: Dado os eventos A e B do item c), A ∩ B é a possibilidade de ocorrência de um divisor de 6 e quadrado perfeito.

$$A = \{1,2,3,6\}$$
$$B = \{1,4\}$$
$$A \cap B = \{1\}$$

- Eventos mutuamente exclusivos: são aqueles que possuem conjuntos disjuntos, ou seja, que não possuem elementos comuns.

Exemplo: Considere o evento D, a possibilidade de ocorrência de número impar o evento E, a possibilidade de ocorrência de um número par e D ∩ E a ocorrência do evento D e do evento E.

$$D = \{1,3,5\}$$
$$E = \{2,4,6\}$$
$$D \cap E = \varnothing$$

- Eventos complementares: Dois eventos são complementares se a sua união é o espaço amostral e a sua intersecção é o conjunto vazio. Podemos representar das seguinte formas:

$$A \cup \bar{A} = \delta \qquad e \qquad A \cap \bar{A} = \varnothing$$

Exemplo: Considere o evento A, a probabilidade de ocorrência de número ímpar e evento B, a possibilidade de ocorrência de número par. Temos que:

$$A \cup \bar{A} = \delta = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$A \cap \bar{A} = \varnothing$$

PROBABILIDADE DE UM EVENTO

Se um fenômeno aleatório, o número de elementos do espaço amostral é n (A), então a probabilidade de ocorrer o evento A é o número P (A), tal que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Obs. Essa definição é válida quando o espaço amostral δ for equiprobabilistico, isto é, quando todos os elementos de δ tiveram o mesmo probabilidade.

Propriedades:

I) $P(\varnothing) = 0$
II) $P(\delta) = 1$
III) $0 \leq P(A) \leq 1$
IV) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

PROBABILIDADE DA UNIÃO DE DOIS EVENTOS

Sendo A e B eventos do mesmo espaço amostral δ, têm-se que:

A probabilidade do evento A ou B é igual a soma das probabilidades dos eventos A e B, diminuída da probabilidade do evento A ∩ B.

Se os eventos A e B são mutuamente exclusivos a probabilidade o evento A ou B é igual à soma das probabilidades.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemplo: Qual é a probabilidade de se jogar um dado e se obter o número 4 ou um número par?
Resolução: o espaço amostral é $\delta = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$n(\delta) = 6$$

Os eventos são:

- ocorrência do número 4 → $A = \{4\} \therefore n(A) = 1$
- ocorrência de número par $B = \{2,4,6\} \therefore n(B) = 3$
- ocorrência da intersecção $A \cap B = \{4\} \therefore n(A \cap B) = 1$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \frac{n(A)}{n(\delta)} + \frac{n(B)}{n(\delta)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\delta)}$$
$$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ ou } P((A \cup B)) = 50\%$$

Outro método
O evento ocorrência do número 4 ou de número par é:

$$A = \{2,4,6\} \rightarrow n(A) = 3$$
$$\text{Logo, } P(A) = \frac{n(A)}{n(\delta)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{resp. } 50\%$$

EXERCÍCIOS

1. (FUVEST – 2002) Dois triângulos congruentes, com lados coloridos, são *indistinguíveis* se podem ser sobrepostos de tal modo que as cores dos lados coincidentes sejam as mesmas. Dados dois triângulos equiláteros congruentes, cada um de seus lados é pintado com uma cor escolhida dentre duas possíveis, com igual probabilidade. A probabilidade de que esses triângulos sejam indistinguíveis é de:
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{9}{16}$ d) $\frac{5}{16}$ e) $\frac{15}{32}$

2. (FUVEST – 2000) Um arquivo de escritório possui 4 gavetas, chamadas a, b, c, d. Em cada gaveta cabem no máximo 5 pastas. Uma secretária guardou, ao acaso, 18 pastas nesse arquivo. Qual é a probabilidade de haver exatamente 4 pastas na gaveta a?
a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{3}{20}$ d) $\frac{1}{20}$ e) $\frac{1}{30}$

3. (VUNESP – 2005) O gerente de uma loja de roupas, antes de fazer nova encomenda de calças jeans femininas, verificou qual a quantidade de calças vendidas no mês anterior, para cada número (tamanho). A distribuição de probabilidades referente aos números vendidos no mês anterior foi a seguinte:

Número (tamanho)	36	38	40	42	44	46
Probabilidade	0,12	0,22	0,30	0,20	0,11	0,05

Se o gerente fizer uma encomenda de 500 calças de acordo com as probabilidades de vendas dadas na tabela, as quantidades de calças encomendadas de número 40 ou menos, e de número superior a 40, serão, respectivamente:

a) 320 e 180. b) 380 e 120. c) 350 e 150.
d) 180 e 320. e) 120 e 380.

4. (VUNESP – 2003) Para uma partida de futebol, a probabilidade de o jogador R *não* ser escalado é 0,2 e a probabilidade de o jogador S ser escalado é 0,7.
Sabendo que a escalação de um deles é independente da escalação do outro, a probabilidade de os dois jogadores serem escalados é:
a) 0,06. b) 0,14. c) 0,24. d) 0,56. e) 0,72.

5. (PUCSP – 2005) Joel e Jane fazem parte de um grupo de dez atores: 4 mulheres e 6 homens. Se duas mulheres e três homens forem escolhidos para compor o elenco de uma peça teatral, a probabilidade de que Joel e Jane, juntos, estejam entre eles é
a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{8}$

6. (PUCSP – 2003) Serão sorteados 4 prêmios iguais entre os 20 melhores alunos de um colégio, dentre os quais estão Tales e Euler. Se cada aluno pode receber apenas um prêmio, a probabilidade de que Tales ou Euler façam parte do grupo sorteado é
a) $\frac{3}{95}$ b) $\frac{1}{19}$ c) $\frac{3}{19}$ d) $\frac{7}{19}$ e) $\frac{38}{95}$

7. (MACK – 2005) O frentista de um posto de gasolina deve calibrar os 4 pneus de um carro. Como está com pressa, escolhe, ao acaso, apenas 2 deles para calibrar. A probabilidade de ele ter calibrado os dois pneus dianteiros é
a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{1}{6}$

8. (MACK – 2005) Uma loja colocou à venda 27 calças jeans, das quais 6 apresentam defeito. Escolhendo-se 3 calças ao acaso, a probabilidade de as 3 estarem com defeito é
a) $\frac{15}{351}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $\frac{6}{117}$ d) $\frac{4}{585}$ e) $\frac{24}{65}$

3. NÚMEROS COMPLEXOS

INTRODUÇÃO

Vejamos a seguinte equação, seguida de sua resolução:

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$$

$$x = \frac{2-\sqrt{-4}}{2} \text{ ou } x = \frac{2+\sqrt{-4}}{2}$$

Mas sabemos que o número $\sqrt{-4}$ não existe no conjunto dos números Reais, portanto, definiremos o número imaginário a seguir:

$$i^2 = -1$$

Usando este "novo número", podemos prosseguir na resolução da equação pois

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4\cdot(-1)} = \sqrt{4\cdot i^2} = 2i$$

Então,

$$x = \frac{2-\sqrt{-4}}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$$

ou

$$x = \frac{2+\sqrt{-4}}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$$

Logo, o conjunto solução desta equação é:

$$S = \{1-i, 1+i\}$$

Estes números que achamos, $(1-i)$ e $(1+i)$ são chamados números complexos. Outros exemplos de números complexos são:

$$2 + 4i,\ i,\ \sqrt{3} - 5i,\ 3 + \frac{1}{3}\cdot i$$

De forma geral, todo número complexo pode ser escrito na forma $a + bi$, onde a e b são números reais.
Então, se um número z é complexo, logo

$$z = a + bi$$

Sendo a conhecido como a parte real do número complexo (ou Re(z)) e b como parte imaginária (ou Im(z)).

Dizemos que dois números complexos são iguais quando as partes reais de cada número são iguais e as partes imaginárias também, ou seja, os complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = b \text{ e } c = d$$

OPERAÇÕES COM COMPLEXOS

ADIÇÃO

A adição de números complexos é feita somando-se as partes reais entre si e as partes imaginárias entre si.

Exemplo:

Calcule $z_1 + z_2$ sendo $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 1 + 2i$.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2+i) + (1+2i) = \\ &= (2+1) + (i+2i) = 3 + 3i \end{aligned}$$

Então $z_1 + z_2 = 3 + 3i$

MULTIPLICAÇÃO

A multiplicação de números complexos é feita utilizando-se a propriedade distributiva. Devemos lembrar que $i^2 = -1$.

Exemplo

Calcule $z_1 \cdot z_2$ sendo $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 1 + 2i$.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (2+i)\cdot(1+2i) = \\ &= 2\cdot 1 + 2\cdot 2i + i\cdot 1 + i\cdot 2i = \\ &= 2 + 4i + i + 2i^2 = 2 + 5i + 2(-1) = \\ &= 2 - 2 + 5i = 5i \end{aligned}$$

Então, $z_1 \cdot z_2 = 5i$

DIVISÃO

Para calcular a divisão de números complexos, usamos um artifício. Vamos relembrar do seguinte produto notável:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Portanto, se quisermos calcular o número $\frac{1}{2+i}$, precisamos "tirar" o número imaginário do denominador usando a igualdade acima. Então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+i} &= \frac{1}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i} = \frac{2-i}{2^2 - i^2} = \\ &= \frac{2-i}{4-(-1)} = \frac{2-i}{4+1} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\cdot i \end{aligned}$$

Logo, $\frac{1}{2+i} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\cdot i$

Observação:
O número $\bar{z} = 2 - i$ é chamado *conjugado* de $z = 2 + i$.

EXERCÍCIOS

1. Se $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 - 2i$, $z_3 = i$ e $z_4 = 4 + 2i$, calcule:

a) $z_1 + z_2 =$

b) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 =$

c) $\overline{z_1 + z_2} =$

d) $z_3 - z_1 =$

e) $z_2 - z_4 =$

f) $2 \cdot z_1 - 3 \cdot z_2 + 3 \cdot z_3 - 2 \cdot z_4 =$

g) $z_1 \cdot z_2 =$

h) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 =$

i) $\overline{z_1 \cdot z_2} =$

j) $z_2 \cdot \bar{z}_2 =$

k) $z_4 \cdot \bar{z}_4 =$

l) $(\bar{z}_1)^2 =$

2. Sendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, e com *a,b,c* e $d \in \mathbb{R}$ e sendo $\bar{z}_1$ e $\bar{z}_2$ seus respectivos conjugados, decida se as identidades abaixo são verdadeiras ou falsa.

( ) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{(z_1 + z_2)}$

( ) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{(z_1 \cdot z_2)}$

( ) $z_1 \cdot \bar{z}_1 = a^2 - b^2$

( ) $z_1{}^2 + \bar{z}_1{}^2 = 2(a+b)(a-b)$

( ) $-\bar{z}_1 = \overline{(-z_1)}$ ..

( ) $z_1 \cdot z_2 = ac - bd + (ab + bc)i$

3. (PUC) O conjugado do número complexo $\dfrac{1+3i}{2-i}$, é:

a) $\dfrac{-1-7i}{5}$ b) $\dfrac{1-i}{5}$ c) $\dfrac{1-2i}{7}$

d) $\dfrac{-1+7i}{5}$ e) $\dfrac{1+i}{5}$

4. (PUC) O número complexo z que verifica a equação $iz + 2\bar{z} + 1 - i = 0$ é:

a) $-1 + 2i$ b) $-1 + i$ c) $1 - i$

d) $1 + i$ e) $-1 - i$

5. (PUCCAMP) Seja z o número complexo $a + bi$. Se z é igual ao seu conjugado $\bar{z}$ podemos afirmar que:

a) a parte imaginária de z é necessariamente nula

b) a parte real de z é necessariamente nula

c) $|\bar{z}| = -|z|$

d) $z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2$

e) n.d.a.

6. (UFBA) Sendo $z = 2 - i$, o inverso de z^2 é:

a) $\dfrac{5+4i}{41}$ b) $\dfrac{2+i}{5}$

c) $\dfrac{4}{25} - \dfrac{3}{25} \cdot i$

d) $\dfrac{3}{25} + \dfrac{4}{25} \cdot i$

e) $\dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25} \cdot i$

7. (ITA) Se z_1 e z_2 são números complexos, $z_1 + z_2$ e $z_1 \cdot z_2$ são ambos reais, então podemos afirmar que:

a) z_1 e z_2 são ambos reais ou $z_1 = \bar{z}_2$

b) z_1 e z_2 são números complexos não reais

c) z_1 e z_2 são números reais irracionais

d) z_1 é número complexo puro e z_2 é número real

e) nenhuma das anteriores

POTÊNCIAS DE i

Vamos calcular algumas potências de *i*:

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1).(-1) = 1$

$i^5 = i \cdot i^4 = i \cdot 1 = i$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$

Mais resumidamente, podemos ver as potências abaixo:

$i^1 = i$	$i^5 = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$
$i^4 = 1$	$i^8 = 1$

Repare que $i^1 = i^5 = 1$, que $i^2 = i^6 = -1$ e assim por diante. Repare também que o resto da divisão de 5 por 4 é 1 e que o resto da divisão de 6 por 4 é 2.

De forma geral, se *r* é o resto da divisão de *n* por 4, então $i^n = i^r$.

Exemplo

Calcule o valor de i^{71}.

$$\begin{array}{r|l} 71 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 17 \end{array}$$

Como o resto da divisão de 71 por 4 é 3, temos que:

$$i^{71} = i^3 = -i$$

EXERCÍCIOS

1. Calcule:

a) $i^{16} =$

b) $i^{213} =$

c) $i^{49} =$

d) $\dfrac{i^{43} + i^{98} \cdot i^{2} + i^{125}}{i^{230}} =$

2. O valor de $\left(\dfrac{\mathrm{i}^{27} + \mathrm{i}^{55}}{\mathrm{i}^{121}}\right)$ é

a) 1
b) i
c) – 2
d) – i
e) -1

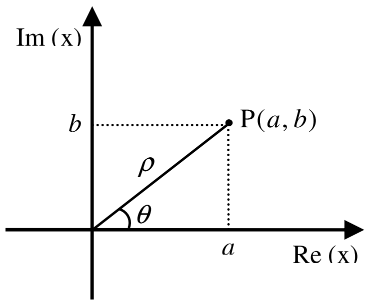
3. O número $(1-i)^2$ é igual a

a) 2i
b) – 2i
c) $2 + \mathrm{i}$
d) $1 + \mathrm{i}$
e) 2

FORMA TRIGONOMÉTRICA

PLANO DE ARGAND-GAUSS

Para os números complexos também existe uma interpretação geométrica. Observe a figura abaixo.



O ponto P, com coordenadas (*a,b*), representa o número complexo $z = a + bi$ no plano.

O ângulo θ é chamado argumento de z$\left(\theta = \arg(z)\right)$.

O módulo ρ é a distância de P à origem do plano e é calculado usando o teorema de pitágoras:

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

FORMA TRIGONOMÉTRICA OU POLAR

Pela trigonometria no triângulo retângulo formado no plano de Argand-Gauss, temos:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{\rho} \Leftrightarrow b = \rho \cdot \text{sen}\,\theta$$

e

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \Leftrightarrow a = \rho \cdot \cos\theta$$

Então,

$$z = a + bi$$
$$z = p \cdot \cos\theta + \rho \cdot \text{sen}\,\theta \cdot i$$
$$z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$$

POTENCIAÇÃO

Dado o número $z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$ não nulo e o número inteiro n, então:

$$z^n = \rho^n \cdot (\cos n\theta + i \cdot \text{sen}\,n\theta)$$

Esta fórmula é conhecida como 1ª fórmula de Moivre.

RADICIAÇÃO

Dado o número $z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$ não nulo e o número natural n, então:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

Esta fórmula é conhecida como 2ª fórmula de Moivre.

EXERCÍCIOS

4. (VUNESP) A expressão $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot i\right)^{109}$, onde i é a unidade imaginária dos complexos, é igual a:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot i$
b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot i$
c) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot i$
d) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot i$
e) 1

5. (UFAL) Se z é um complexo tal que $z \cdot \overline{z} = 25$, então o módulo de z é:

a) $\sqrt{5}$ b) 5

c) $5\sqrt{5}$ d) 25

e) 50

6. (FATEC) O menor valor de *n*, $n \in \mathbb{N}^*$, para que o número complexo $\left(1 + i \cdot \sqrt{3}\right)^n$, onde $i^2 = -1$, seja um numero real é:

a) 2 b) 3 c) 5 d) 7 e) 11

7. (MACK) Se $u = 3 + 2i$ e $v = 1 + i$, então $|u + v|$ é:

a) 5 b) $\sqrt{26}$ c) $\sqrt{29}$

d) 7 e) 15

8. (PUC) Na forma trigonométrica o número complexo $z = \dfrac{(1+i)^2}{1-i}$ fica:

a) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right)$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right)$

c) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} - i \cdot \text{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right)$

d) $\sqrt{2}\left(-\cos\dfrac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right)$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} - i \cdot \text{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right)$

9. (UFSE) O módulo de um número complexo é $2\sqrt{2}$ e seu argumento principal é 45º. A sua forma algébrica é:

a) $4 + 4i$ b) $2 + 2i$

c) $2 - 2i$ d) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

10. (UEL) O número complexo $z = \dfrac{i^{10}}{1-i}$ tem módulo igual ao valor de:

a) $\text{sen}\,150°$

b) $\cos 315°$

c) $\text{sen}\,60°$

d) $\text{tg}\,225°$

e) $\sec 45°$

11. (MACK) A solução da equação $|z| + z = 2 + i$ é um número complexo de módulo

a) $\dfrac{5}{4}$

b) $\sqrt{5}$

c) 1

d) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

e) $\dfrac{5}{2}$

12. (PUCCAMP) O módulo e o argumento do complexo $\left(\sqrt{3} + i\right)^8$ são, respectivamente:

a) 4^4 e $\dfrac{4\pi}{3}$

b) 2^8 e $\dfrac{8\pi}{3}$

c) 4^8 e $\dfrac{8\pi}{9}$

d) 3^8 e $\dfrac{5\pi}{4}$

e) n.d.a.

13. (FEI) Seja $z = \dfrac{4-3i}{3+4i}$. Calcular a parte real de z, a parte imaginária de z e o módulo de z.

4. POLINÔMIOS

FUNÇÃO POLINOMIAL

Toda função do tipo

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_2x^2+a_1x+a_0\,,$$

sendo a_n, a_{n-1}, a_{n-2},..., a_2, a_1 *e* a_0 números complexos é chamada de função polinomial na variável x.

Se $a_n \neq 0$, então o polinômio f(x) tem grau n.

Exemplos

1) Se tivermos o polinômio $p(x)=7x^2+2x-3$, então:

$$a_2=7,\ \ a_1=2 \text{ e } a_0=-3$$

e é um polinômio de 2º grau pois $n=2$.

2) Se tivermos o polinômio $p(x)=5x^4+2x^2+1$, então:

$$a_4=5,\ \ a_3=0,\ \ a_2=2,\ \ \ a_1=0 \text{ e } a_0=1$$

e é um polinômio de 4º grau pois $n=4$

IDENTIDADE POLINOMIAL

Dois polinômios p(x) e q(x) são idênticos quando os coeficientes dos termos correspondentes forem iguais.

Exemplo

Sejam os polinômios:

$$p(x)=ax^2+bx+c \quad \text{e} \quad q(x)=dx^2+ex+f$$

p(x) e q(x) serão idênticos se, e somente se:

$$a=d,\ \ b=e \ \text{ e } \ c=f$$

e indicamos $p(x)\equiv q(x)$

ADIÇÃO, SUBTRAÇÃO E MULTIPLICAÇÃO

Para somarmos e subtrairmos polinômios, somamos e subtraímos os coeficientes dos termos correspondentes. E para multiplicarmos, usamos a propriedade distributiva.

Exemplos

Sejam os polinômios

$$p(x)=2x^3+3x^2+x+5 \ \text{ e } \ q(x)=4x^2+3x\,,$$

então calcule:

1) $p(x)+q(x)=$

$$2x^3+3x^2+x+5+4x^2+3x=$$
$$=2x^3+(3+4)x^2+(1+3)x+5=2x^3+7x^2+4x+5$$

2) $p(x)-q(x)=$

$$2x^3+3x^2+x+5-\left(4x^2+3x\right)$$
$$=2x^3+3x^2+x+5-4x^2-3x$$
$$=2x^3+(3-4)x^2+(1-3)x+5$$
$$=2x^3-x^2-2x+5$$

3) $p(x)\cdot q(x)=$

$$=\left(2x^3+3x^2+x+5\right)\left(4x^2+3x\right)=$$
$$=8x^5+6x^4+12x^4+9x^3+4x^3+3x^2+20x^2+15x=$$
$$=8x^5+(6+12)x^4+(9+4)x^3+(3+20)x^2+15x=$$
$$=8x^5+18x^4+13x^3+23x^2+15x$$

DIVISÃO

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \cline{2-2} R & Q \end{array} \Leftrightarrow A=Q\cdot B+R$$

A é o dividendo;, B é o divisor;, Q é o quociente e R é o resto.

Seja $A=\left(x^3+2x^2-x+1\right)$,

$B=x+2$,

$Q=x^2-1$,

$R=3$

Divisão de um polimônio por binômio por um binômio da forma $ax+b$

Seja $P\left(x\right)=4x^2-2x+3$

$$Q\left(x\right)=2x-1$$

A raiz do Q(x) divisor é:

$$2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Calculemos, agora, P(x) para $x=\dfrac{1}{2}$:

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=4\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2}+3$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=3$$

Observe que $R(x)=P\left(\dfrac{1}{2}\right)=3$

Pelo exemplo desenvolvido, mostramos que o resto da divisão do polinômio $4x^2-2x+3$ por $2x-1$ é igual ao valor numérico de P(x), para $x=\dfrac{1}{2}$, isto é, a raiz do divisor.

TEOREMA DO RESTO

O resto da divisão de um polinômio P(x) pelo binômio $ax+b$ é igual a $P\left(-\dfrac{a}{b}\right)$.

Em que $x=-\dfrac{b}{a}$ é a raiz do divisor.

Como o resto da divisão é independente de x, isto é, é igual a uma constante, chamaremos R(x) de r.

Sabemos que $P\left(x\right)=\left(ax+b\right)\cdot Q\left(x\right)+r$

Se x for igual à raiz do divisor, isto é, $x=-\dfrac{b}{a}$, vem:

$$P\left(-\frac{b}{a}\right)=\left(a\cdot\frac{-b}{a}+b\right)\cdot Q\left(-\frac{b}{a}\right)+r$$

$$P\left(-\frac{b}{a}\right)=(-b+b)\cdot Q\left(-\frac{b}{a}\right)+r$$
$$P\left(-\frac{b}{a}\right)=r$$

TEOREMA DE D'ALEMBERT

Um polinômio P(x) é divisível pelo binômio $ax+b$ se, e somente se, $P\left(-\frac{b}{a}\right)=0$

Exemplo:

(Cescem) Determinar o vaor de p, para que o polinômio $P(x)=2x^3+5x^2-px+2$ seja divisível por $x-2$.

Se P(x) é divisível por x-2, então P(2)=0.

$$2\cdot 8+5\cdot 4-2p+2=0$$
$$16+20-2p+2=0$$
$$p=19$$

DISPOSITIVO DE BRIOT-RUFFINI

Para dividir um polinômio P(x) por um binômio da forma $ax+b$, o dispositivo prático de Briot-Ruffini é muito mais eficiente que o método da chave.

Exemplo:

Dados os polinômios

$$A(x)=3x^5+4x^4+3x^3-7x^2-2x+3 \text{ e } B(x)=x-1,$$

calcule a divisão de A(x) por B(x).

Escrevemos a raiz de B(x) e, separado por um traço, escrevemos os coeficientes do polinômio A(x), na sequência.

$$\begin{array}{c|cccccc} 1 & 3 & 4 & 3 & -7 & -2 & 3 \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

Repetimos o primeiro coeficiente, obtendo o primeiro termo do quociente.

$$\begin{array}{c|cccccc} 1 & 3 & 4 & 3 & -7 & -2 & 3 \\ \hline & 3 & & & & & \end{array}$$

Multiplicamos 3 por 1 e adicionamos o resultado a 4, obtendo 7, que é o segundo termo do quociente

$$\begin{array}{c|cccccc} 1 & 3 & 4 & 3 & -7 & -2 & 3 \\ \hline & 3 & 7 & & & & \end{array}$$

E assim por diante, até o último termo,

$$\begin{array}{c|cccccc} 1 & 3 & 4 & 3 & -7 & -2 & 3 \\ \hline & 3 & 7 & 10 & 3 & 1 & 4 \end{array}$$

Chamando o quociente de A(x) por B(x) de Q(x) e o resto R(x), teremos:

$$Q(x)=3x^4+7x^3+10x^2+3x+1 \quad \text{e} \quad R(x)=4$$

Podemos observar que A(x) era do 5º grau e B(x) do 1º grau e obtivemos Q(x) do 4º grau. Temos que:

$$gr(Q)=gr(A)-gr(B)=5-4=1$$

onde $gr(T)$ é o grau de um polinômio $T(x)$

EXERCÍCIOS

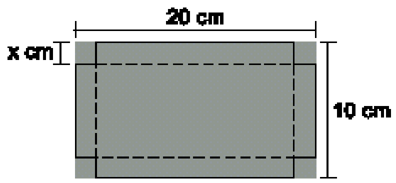
1. (FUVEST – 2000) O polinômio $p(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$ é divisível por x^2+a, para um certo número real a. Pode-se, pois, afirmar que o polinômio p
a) não tem raízes reais.
b) tem uma única raiz real.
c) tem exatamente duas raízes reais distintas.
d) tem exatamente três raízes reais distintas.
e) tem quatro raízes reais distintas

2. (MACK – 2005) Um polinômio p(x), de grau maior que 1, deixa resto 1, quando dividido por x – 2 , e deixa resto 2, quando dividido por x – 3 . O resto da divisão de p(x) por x^2-5x+6 é

a) x b) 2x+1 c) 2x d) x – 1 e) 2

3. (VUNESP 2003) Considere um pedaço de cartolina retangular de lado menor 10 cm e lado maior 20 cm.

Retirando-se 4 quadrados iguais de lados x cm (um quadrado de cada canto) e dobrando-se na linha pontilhada conforme mostra a figura, obtém-se uma pequena caixa retangular sem tampa.



O polinômio na variável x, que representa o volume, em cm^3, desta caixa é:

a) $4x^3-60x^2+200x$
b) $4x^2-60x+200$
c) $4x^3-60x^2+200$
d) x^3-30x^2+200x
e) x^3-15x^2+50x

5. EQUAÇÕES POLINOMIAIS

O QUE É UMA EQUAÇÃO POLINOMIAL?

Denomina-se equação polinomial ou equação algébrica de grau n, na variável $x \in \mathbb{C}$, toda equação que pode ser reduzida à forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

Nesta equação, $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ são chamados coeficientes; $n \in \mathbb{N}^*; a_n \neq 0$ e a_o é o termo independente

Exemplos

$x^2 - 6x + 8 = 0$ é uma equação polinomial do 2º grau.

$x^5 - \frac{1}{5}x^2 + 3x - 8 = 0$ é uma equação polinomial do 5ºgrau.

RAIZ OU ZERO DA EQUAÇÃO

Denomina-se raiz ou zero da equação polinomial P(x)=0 todo número complexo α para o qual P(α)=0 é uma sentença verdadeira.

A equação algébrica $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ admite 2 como raiz, pois é fato que :

$$(2)^3 - 5.(2)^2 + 6(2) = 0$$

Resolver uma equação algébrica é encontrar o seu conjunto solução ou conjunto verdade.

Quando não é citado o conjunto domínio na equação, adotaremos o conjunto dos números complexos.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Como visto anteriormente, podemos observar que as equações do 1º e do 2º graus têm raízes que são função dos seus coeficientes.(Vide capítulo 1)

Entretanto, outros métodos podem utilizados para resolução de equações com grau maior do que 2.

Lembre-se que utilizamos o isolamento da variável x para resolver as equações do 1º Grau e o método de Baskara para as equações do 2º grau.

Então, temos que o teorema fundamental da álgebra, demonstrado por Gauss em 1799, é dado por:

Toda equação P(x)=0, de grau n, tem pelo menos uma raiz real ou complexa.

Observe que n deve ser maior do que 1 para que o teorema seja verdadeiro.

TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

Sabe-se que todo polinômio de grau n com a forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Pode ser escrito da forma fatorada:

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)$$

Onde, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ são raízes de P(x). Ou seja, toda equação polinomial de grau n tem n raízes reais ou complexas.

Exemplos:

$$P(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$
$$P(x) = x^4 - 5x^2 - 36 = (x-3)(x+3)(x-2i)(x+2i)$$

MULTIPLICIDADE DE UMA RAIZ

As raízes de uma equação algébrica podem ser todas distintas ou não. Ou seja, se um número α for raiz de uma equação polinomial para um único valor de *x*, então este número será chamado de raiz simples. Entretanto, se α for raiz para m valores de x então a raiz será multiplicidade *m*.

Assim, se um polinômio P(x) é tal que:

$$P(x) = (x - \alpha)^m \cdot Q(x)$$

Onde, $Q(\alpha) \neq 0$, dizemos que α é raiz de multiplicidade m da equação P(x)=0.

EXERCÍCIOS

1. Determine o conjunto solução das equações:

$a) x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

$b) x^3 + 2x^2 + 25x + 50 = 0$

$c) x^3 + x = 0$

$d) x^3 + x^2 - 100x - 100 = 0$

2. Quais são as raízes da equação $(1 - x^4)(x^3 - 2x + 1) = 0$

3. (EEM-SP) Achar o valor de m de modo que 1 seja raiz da equação $x^3 - mx^2 + 11x - 6 = 0$ e em seguida achar as outras raízes.

4. (Fuvest-SP) O polinômio $P(x) = x^3 - x^2 + x + a$ é divisível por $x - 1$. Ache todas as raízes complexas de P(x)

5. (PUC-SP) Sabe-se que -2 é raiz do polinômio:

$$P(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & k & x \end{vmatrix}$$, no qual $x \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{R}$ .Nestas condições determine:

a) O valor de k

b) As demais raízes do polinômio

RAÍZES NULAS

Observe os exemplos abaixo onde o termo independente (a_0) é zero

$$2x^5 + 4x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2\left(2x^3 + 4x - 6\right) = 0$$
$$x^3 - 4x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 4x + 5\right) = 0$$

No primeiro exemplo temo 2 raízes nulas de multiplicidade 2. Já no segundo exemplo temos 1 raiz nula de multiplicidade 1.

RAÍZES COMPLEXAS

Consideremos os números complexos $z = a + b \cdot i$, com $a, b \in$ e $b \neq 0$ e a equação algébrica de coeficientes reais $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ .Se z é a raiz de P(x)=0, pode-se demonstrar então que o seu **conjugado também é raiz da equação**.

Exemplo:

Seja a equação $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 0$ com raiz i. Sabe-se que a outra raiz será –i.

RELAÇÕES DE GIRARD

O matemático Albert Girard (1590-1633) apresentou um importante teorema que relacionava as raízes com os coeficientes de uma equação algébrica.

Vamos fazer uma retrospectiva estudando a equação do 2º grau $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - \alpha_1\right)\left(x - \alpha_2\right)$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = a\left(x - \alpha_1\right)\left(x - \alpha_2\right)$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - \left(\alpha_1 + \alpha_2\right)x + \alpha_1 \cdot \alpha_2$$

Igualando os coeficientes temos:

$$\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \left(\alpha_1 \cdot \alpha_2\right) = \frac{c}{a}$$

As regras de soma e produto foram apresentadas acima. Vamos utilizar a mesma metodologia para as equações do 3º Grau.

$$P(x) = ax^3 + bx^3 + cx + d = 0$$
$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a\left(x - \alpha_1\right)\left(x - \alpha_2\right)\left(x - \alpha_3\right)$$
$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + d =$$
$$= x^3 - \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\right)x^2 + \left(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3\right)x +$$
$$+\left(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\right)$$

Igualando os coeficientes temos:

$$\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_1 = -\frac{b}{a}$$
$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{c}{a}$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{d}{a}$$

Para o caso geral de uma equação algébrica de grau $n > 3$, a demonstração é análoga às anteriores

Se $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ é uma equação algébrica de grau n com n>1 e com $a_n \neq 0$ e de raízes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, temos:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$
$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + ... + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + ... + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}.$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + ... = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{(-1)^n a_0}{a_n}$$

EXERCÍCIOS

1. A equação algébrica $x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 4x - 13 = 0$, tem a raiz complexa $x_1 = 2 + 3i$, onde i é a unidade imaginária. Determinar as outras três raízes.

2. (Unicamp-SP) Considere a equação:
$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$$
a) Mostre que i é raiz dessa equação

b) Encontre as outras raízes da mesma equação.

3 .Calcule a soma das raízes da equação: $4x^3 - 20x^2 + 23x - 7 = 0$.

4. (UFPR) Calcule o valor de $\log_{10}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right)$, sendo a,b,c as raízes da equação $2x^3 - 30x^2 + 15x - 3 = 0$.

5. (UFSC) O número complexo (1+4i) é raiz da equação $x^2 + px + q = 0$ de coeficientes reais. Determine q – p.

RAÍZES RACIONAIS

Se o número racional $\frac{p}{q}$, com p e q primos entre si, for raiz da equação algébrica de coeficientes inteiros $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ com $a_n \neq 0$ e a $a_0 \neq 0$, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Dicas:

Em toda equação algébrica, quando a soma dos coeficientes for zero, o número 1 será raiz da equação.

As raízes complexas não reais de uma equação algébrica de coeficientes reais ocorrem aos pares. Portanto, toda equação de grau ímpar, com coeficientes reais, admite pelo menos uma raiz Real.

EXERCÍCIOS

1. (FGV-SP) Considerar a equação polinomial $x^3 - 3 \cdot x^2 - k \cdot x + 12 = 0$

a) Determine k de modo que haja duas raízes opostas.

b) Determine k de modo que 1 seja raiz da equação; neste caso determine também as outras raízes.

2. (Fuvest-SP) O Polinômio $x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4m$ tem uma raiz igual a -1.

a) Determine m

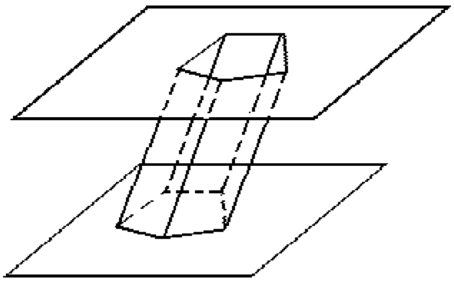
b) Fatore o polinômio num produto de binômios de 1º grau.

FRENTE DOIS

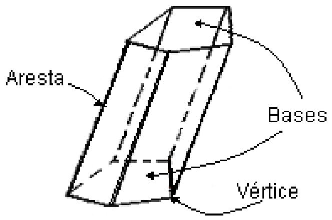
6. PRISMAS

O PRISMA

O prisma é o poliedro convexo formado por dois polígonos congruentes em planos paralelos distintos, sendo estes dois polígonos ligados por paralelogramos, conforme figura.

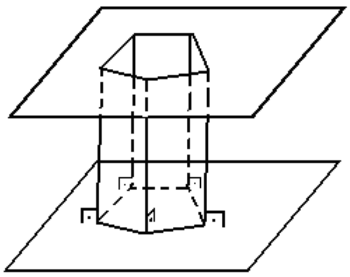


É comum se referir somente às regiões do prisma, como as duas bases (inferior e superior), suas arestas, vértices e faces laterais.



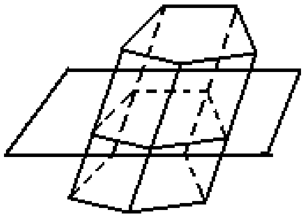
Numa linguagem comum, os vértices podem ser chamados de “bicos” ou “quinas” e as arestas de “cantos”.

Prismas podem ser oblíquos ou retos; no exemplo anterior, é oblíquo. Um prisma é reto quando as faces laterais formam um ângulo reto com os planos.



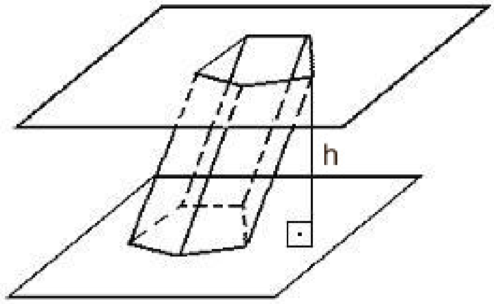
A SECÇÃO TRANSVERSAL

Uma secção transversal é a região contida num plano paralelo e distinto das bases. Em outras palavras, é a intersecção do poliedro com um plano paralelo. Vulgarmente falando, é uma “fatia” do poliedro. No caso do prisma, a secção transversal é congruente aos polígonos das bases.



A ALTURA DO PRISMA

A altura de um prisma é definida pela distância entre os planos das bases. Observe a figura:



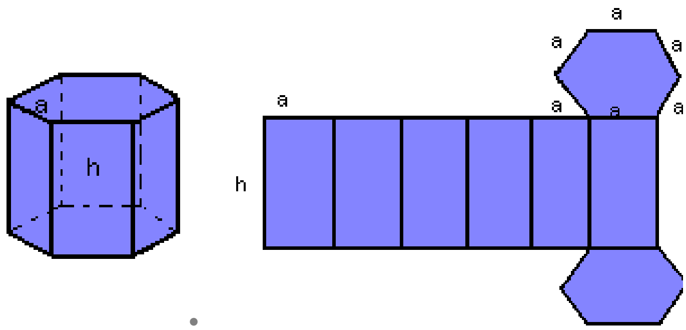
Usualmente denotamos a altura por “h”.

Observação: Quando o prisma é reto, sua altura tem a mesma medida que suas arestas laterais.

A ÁREA TOTAL

A área total de um prisma é a soma da área lateral com as áreas das bases. Sendo a área lateral a soma das áreas das faces laterais.

É como se tivéssemos um prisma construído com cartolina e o desmontássemos, assim poderíamos medir sua área, como na figura a seguir:



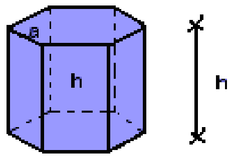
No prisma temos duas bases e, no exemplo anterior, tem-se seis faces laterais.

Podemos indicar a área lateral como A_ℓ e a área da base como A_b. Deste modo, indicamos a área total A_T como:

$$A_T = A_\ell + 2 \cdot A_b$$

VOLUME

Para calcular o volume V que o prisma ocupa basta calcular o produto da área da base A_b pela altura h. Assim:



$$V = A_b \times h$$

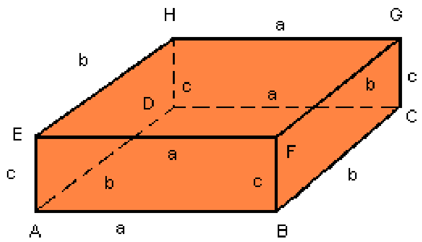
Observação:

A fórmula é válida para qualquer tipo de prisma, tanto oblíquo quanto reto.

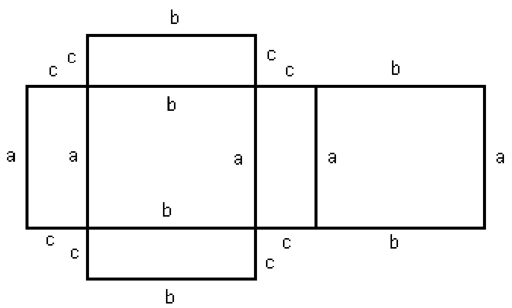
PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO

O paralelepípedo é o prisma cujas faces são paralelogramos e faces opostas paralelas.

O paralelepípedo retângulo é o paralelepípedo reto que tem base retangular. Temos métodos simples para calcular a sua área total e seu volume:



A figura abaixo ilustra a área total do paralelepípedo.



Nessa figura, temos dois retângulos com lados a e b, dois retângulos com lados a e c e, dois retângulos com lados b e c. Então:

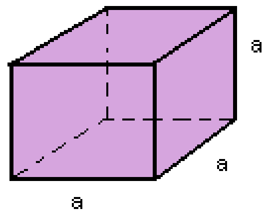
$$A_T = 2ab + 2ac + 2bc$$
$$A_T = 2(ab + ac + bc)$$

Já o volume é mais simples ainda de calcular, pois como a área da base é um retângulo, neste caso a . b. Como o volume é o produto da área da base com a altura e esta é c, então o volume é:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

O CUBO

O cubo é o paralelepípedo retângulo com todas as arestas iguais.



A sua área total é a soma das áreas de suas seis faces, sendo a a medida da aresta:

$$A_T = 6 \cdot a^2$$

E seu volume é:

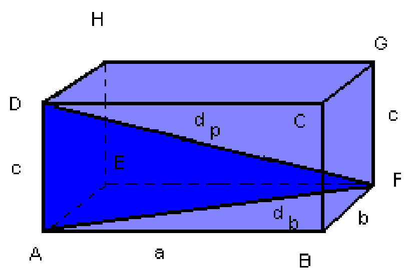
$$V = a \cdot b \cdot c$$

Mas $a = b = c$, então

$$V = a^3$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calcule a diagonal de um paralelepípedo retângulo de arestas a, b e __.



Seja o paralelepípedo com a base inferior ABFE e a superior DCGH (conforme a figura acima). O segmento DF é uma diagonal (d_p), mas antes é preciso saber a valor de AF (d_b), que é a diagonal da base. Para isso vamos usar o Teorema de Pitágoras no triângulo ABF.

$$d_b^2 = a^2 + b^2$$

Usando novamente Pitágoras para o triângulo ADF, temos:

$$d_p^2 = d_b^2 + c^2$$

mas, pela igualdade anterior, temos:

$$d_p^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

logo,

$$d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

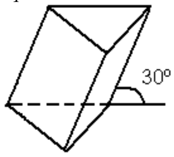
No caso do cubo, temos que suas arestas têm mesma medida e, sabendo que é um paralelepípedo reto retângulo e que sua aresta mede a, então sua diagonal é dada por:

$$d_{cubo} = a\sqrt{3}$$

EXERCÍCIOS

1. Qual a área da superfície e o volume de um prisma reto, sendo sua base um hexágono regular de lado 2 e sua altura igual a $2\sqrt{3}$.

2. Calcule o volume do prisma a seguir, sendo sua base um triângulo equilátero de lado 4 e a aresta lateral igual a 10.



3. Um problema clássico da geometria grega é a duplicação do cubo. Se nós temos um cubo de aresta 1, quanto deverá ser o valor da aresta de outro cubo que tem o dobro de seu volume?
a) 1,5
b) 2
c) $\sqrt{2}$
d) $\sqrt[3]{2}$
e) $\sqrt{3}$

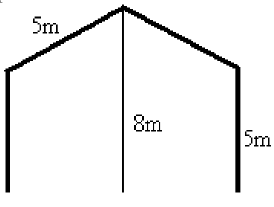
4. Aumentando em 2 cm a aresta X de um cubo, obtemos um segundo cubo, cuja área superficial total aumenta de 216 cm², em relação ao primeiro cubo. Com isso calcule a medida da aresta X do cubo e o volume do segundo cubo.

5. Calcule a diagonal de um cubo cuja área total mede 24 cm².

6. Calcule a área total e o volume do paralelepípedo de dimensões 5 cm, 7 cm e 12 cm.

7. Se alguém estiver construindo uma caixa d'água cujas dimensões da base seja 2 m e 4 m, qual terá que ser a altura para que caiba 10.000 litros de água? (Lembrando que 1 metro cúbico corresponde a 1.000 litros.)
a) 1,25 m.
b) 1,5 m.
c) 2 m.
d) 3,5 m.
e) 5 m.

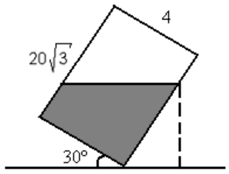
8. Deseja-se construir um túnel de 500 m de extensão e com sua entrada no formato da figura abaixo. Quantos metros cúbicos será preciso escavar para construir este túnel e quantos metros quadrados de asfalto serão preciso para pavimentar a estrada deste túnel?



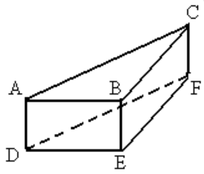
9. (Fuvest) Um recipiente cúbico de aresta 4 está apoiado em um plano horizontal e contém água até uma altura h. Inclina-se o cubo, girando de um ângulo α em torno de uma aresta da base, até que o líquido comece a derramar. Determinar a tangente do ângulo α nos seguintes casos:
a) h=3.
b) h=2.
c) h=1.

10. Se dobrarmos as três dimensões de um paralelepípedo, seu volume V passará a ser quanto?
a) 1,5 V
b) 2 V
c) 4 V
d) 8 V
e) 16 V

11. (Fuvest - 2002) Um bloco retangular de base quadrada de lado 4cm e altura $20\sqrt{3}$ cm, com 2/3 de seu volume cheio de água, está inclinado sobre uma das arestas da base, formando um ângulo de 30º com o solo. Determine a altura h do nível da água em relação ao solo.

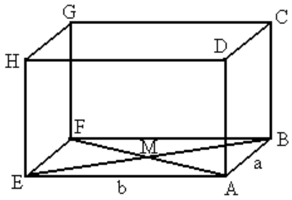


12. (PUC) Dado um prisma reto ABCDEF, no qual DE = 6 cm, EF = 8 cm e DE perpendicular a EF. Se o volume desse prisma é 120cm^3, a sua área total, em centímetros quadrados é:



a) 144
b) 156
c) 160
d) 168
e) 172

13. (Fuvest - 2000) No paralelepípedo reto retângulo da figura abaixo, sabe-se que AB = AD = a, AE = b e que M é a intersecção das diagonais da face ABFE. Se a medida de MC também é igual a b, o valor de b será:

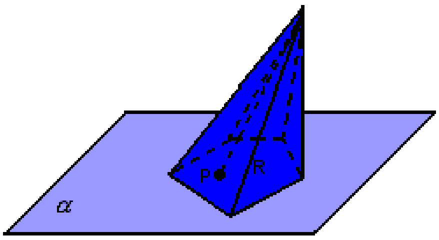


a) $\sqrt{2} \cdot a$
b) $\sqrt{\dfrac{3}{2}} \cdot a$
c) $\sqrt{\dfrac{7}{5}} \cdot a$
d) $\sqrt{3} \cdot a$
e) $\sqrt{\dfrac{5}{3}} \cdot a$

7. PIRÂMIDE

Pirâmide já é uma figura bem conhecida devido principalmente às do Egito.

Formalmente, pirâmide é o poliedro convexo tal que a sua base é um polígono convexo e todos os pontos deste polígono estão ligados a um ponto fora do plano da base denominado vértice principal da pirâmide.



As pirâmides, como os prismas, podem ser retas ou oblíquas. Uma pirâmide reta é aquela que tem a projeção do vértice coincidente com o centro do polígono da base.

PIRÂMIDE REGULAR

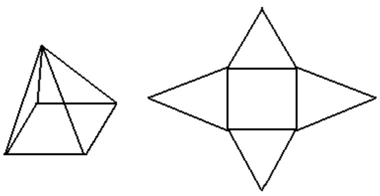
Pirâmide regular é uma pirâmide reta cuja base é um polígono regular.

ÁREA TOTAL

A área total da pirâmide é a soma da área da base e da área lateral. Sendo que a área lateral é a soma das áreas das faces laterais.

$$A_T = A_\ell + A_b$$

No desenho a seguir, podemos visualizar a área de uma pirâmide de base quadrangular.



VOLUME DA PIRÂMIDE

O volume da pirâmide é dado por:

$$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$$

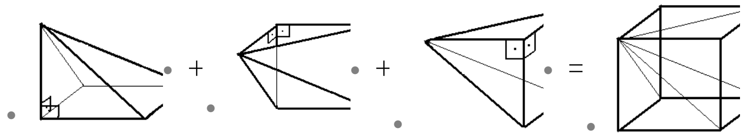
Onde,

A_b = Área da base

h = altura.

Perceba que o volume da pirâmide é um terço do volume de um prisma.

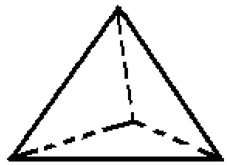
Nas figuras abaixo nós temos um exemplo de que com três pirâmides é possível construir um prisma.



Deste modo percebemos que o volume destes tetraedros é um terço do volume do paralelepípedo.

TETRAEDRO

O Tetraedro é uma pirâmide de base triangular e será regular quando suas seis arestas forem congruentes.

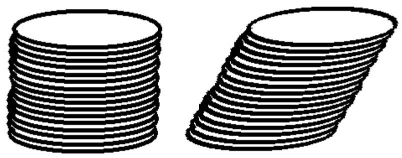


PRINCÍPIO DE CAVALIERI

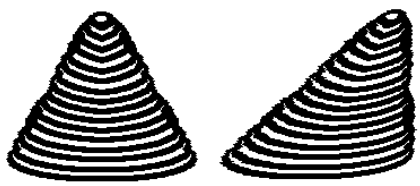
Se dois sólidos determinam em qualquer plano secante a eles, secções transversais com áreas iguais implicam que os dois sólidos possuem volumes iguais.

Vamos falar agora menos formalmente.

Imagine uma pilha de discos alinhados na vertical, ela ocupa um certo volume. Se por acaso alguém empurrar esta pilha para o lado, é fácil perceber que a pilha inclinada ocupará ainda o mesmo volume que antes.



Da mesma forma imagine discos empilhados, sendo o de cima sempre um pouco menor do que o de baixo. A propriedade se mantém!



O Princípio de Cavalieri é importante na percepção de que o volume de uma pirâmide ou de um prisma dependerá apenas da área da base e da altura, não importando se são oblíquos ou retos.

Este mesmo princípio também é usado para cilindros, cones e outros sólidos geométricos.

Curiosidade: Bonaventura Cavalieri (1958-1647) nasceu na Itália e era um discípulo de Galileu, ele desenvolveu este princípio por volta de 1626 usando um método de medidas infinitesimais.

EXERCÍCIOS

1. O volume da pirâmide de base quadrada, cujas oito arestas têm o mesmo comprimento L, é:

a) $\frac{L^3\sqrt{2}}{2}$

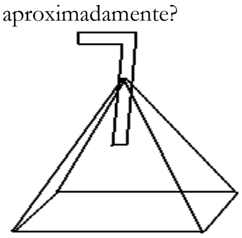
b) $\frac{L^3\sqrt{3}}{6}$

c) $\frac{L^3}{3}$

d) $\frac{L^3\sqrt{3}}{4}$

e) $\frac{L^3}{8}$

2. Deseja-se lançar uma nova caixinha de leite no formato de uma pirâmide de base quadrada, se a caixinha anterior tinha 400ml, base congruente e mesma altura que a nova caixinha, qual o volume de leite que caberá na nova, aproximadamente?



a) 100ml
b) 125ml
c) 133ml
d) 150ml
e) 200ml

3. É dado um cubo de aresta a. Secciona-se o cubo por um plano que forma um ângulo de 30º com uma das faces e passa por uma diagonal dessa face. Calcule os volumes dos sólidos resultantes.

4. As arestas laterais de uma pirâmide regular de 12 faces tem comprimento L. O raio de um círculo circunscrito ao polígono da base desta pirâmide vale:

a) $3\sqrt{2}L^3$

b) $2L^3$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}L^3$

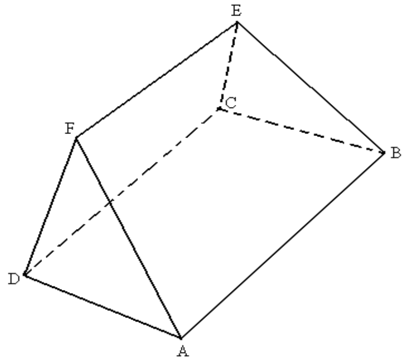
d) $\sqrt{2}L^3$

e) $\frac{\sqrt{2}L^3}{4}$

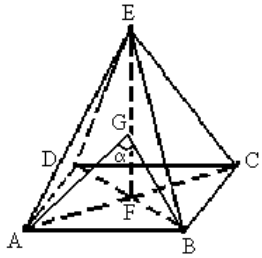
5. (ITA - 2002) Seja uma pirâmide regular de base hexagonal e altura 10m. A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que o volume da pirâmide obtida seja 1/8 do volume da pirâmide original?
a) 2m
b) 4m
c) 5m
d) 6m
e) 8m

6. (FUVEST - 2004) A pirâmide de base retangular ABCD e vértice E representada na figura tem volume 4. Se M é o ponto médio da aresta AB e V é o ponto médio da aresta EC, então o volume da pirâmide de base AMCD e vértice V é:
a) 1
b) 1,5
c) 2
d) 2,5
e) 3

7. (FUVEST 2004) No sólido S representado na figura ao lado, a base ABCD é um retângulo de lados AB = 2L e AD = L; as faces ABEF e DCEF são trapézios; as faces ADF e BCE são triângulos equiláteros e o segmento EF tem comprimento L.
Determinar, em função de L, o volume de S.



8. (FUVEST 2005)(Corrigida) A figura abaixo mostra uma pirâmide reta de base quadrangular ABCD de lado 1 e altura EF = 1. Sendo G o ponto médio da altura EF e α a medida do ângulo AGB, então cos α vale.



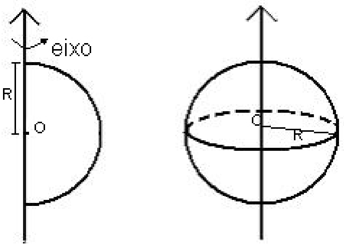
a) 1/2
b) 1/3
c) 1/4
d) 1/5
e) 1/6

OBS: Esta questão foi anulada, pois o enunciado dizia que a pirâmide tinha base “quadrangular” e não “quadrada”, portanto a questão teria infinitas soluções.

8. ESFERA

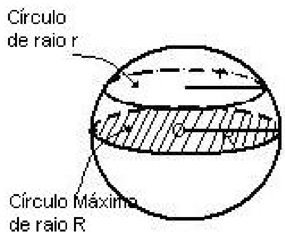
ESFERA

A Esfera pode ser definida como um sólido geométrico obtido pela rotação completa de um semicírculo que contém seu diâmetro.



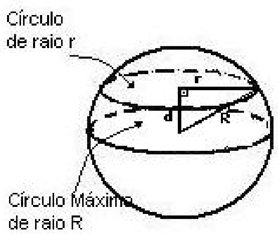
SECÇÃO TRANSVERSAL

Quando um plano corta uma esfera de raio **R**, a secção transversal produzida é um círculo.
No desenho abaixo temos duas secções transversais, uma é o círculo máximo de raio **R** e a outra é um círculo de raio **r** (onde **r<R**).



Obs: O círculo máximo é obtido pelo "corte" na linha do equador, ou seja, a linha que divide a esfera em duas semi-esferas. O Centro **O** da esfera sempre estará contido no círculo máximo.

Considere **d** como sendo a distância entre as secções transversais, então temos:



Então,

$$R^2 = d^2 + r^2.$$

Área da secção do círculo máximo:

$$A_{Secção} = \pi R^2$$

Área da secção do círculo menor:

$$A_{secção} = \pi r^2$$

ÁREA SUPERFICIAL E VOLUME

Considere uma esfera de raio R, então temos que:
A área superficial da esfera é a "casca" da esfera, onde

$$A_{esfera} = 4\pi R^2.$$

O Volume da esfera é calculado da seguinte maneira:

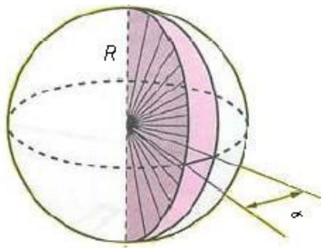
$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Ao final do Capítulo poderemos ver o porquê dessa fórmula.

PARTES DA ESFERA

Cunha Esférica

A Cunha é uma "fatia" da esfera. Veja na figura:



Sabendo o volume da esfera, podemos calcular o volume da cunha esférica com a seguinte regra de três:

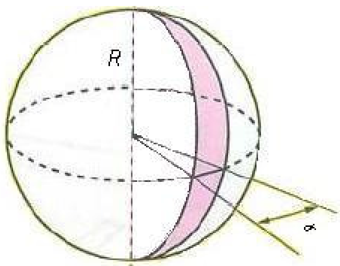
$$\begin{array}{ccc} 360^{\circ} & \_\_\_\_ & \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \alpha & \_\_\_\_ & V_{cunha} \end{array}$$

Onde α é o ângulo de abertura("grossura da fatia").

$$V_{cunha} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{360^{\circ}} \cdot \alpha$$

Fuso Esférico

O Fuso é a "casca" da "fatia". Veja na figura:



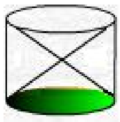
Conhecendo a área da esfera, podemos calcular a área do Fuso Esférico através da seguinte regra de três:

$$\begin{array}{ccc} 360^{\circ} & \_\_\_\_ & 4\pi R^2 \\ \alpha & \_\_\_\_ & A_{fuso} \end{array}$$

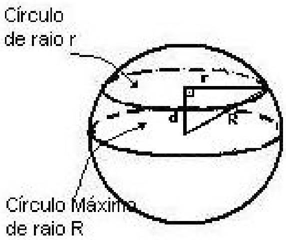
$$A_{fuso} = \frac{4\pi R^2}{360^{\circ}}$$

Observações sobre o Volume da Esfera

Vamos falar sobre o volume da esfera. A demonstração é feita a partir de uma comparação com o cone inscrito em um cilindro circular reto, cuja altura é igual à medida do diâmetro da base, como mostra a figura a seguir:



Sabemos que uma secção transversal da esfera gera uma circunferência como se vê na figura. Considere a esfera de raio **R**, seu raio neste caso pode ser calculado a partir do Teorema de Pitágoras. Sendo **d** a distância da secção transversal ao centro da esfera e **r** o raio da secção menor:

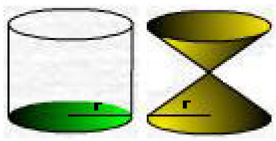


Temos que:

$$R^2 = d^2 + r^2$$
$$d^2 = R^2 - r^2 \text{ e } r^2 = R^2 - d^2$$

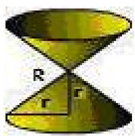
E a área do círculo de raio r é $\pi r^2 = \pi (R^2 - d^2)$.

Considere a figura a seguir. Tem-se dois cones formando algo parecido com uma ampulheta, onde suas bases coincidem com as bases do cilindro.



Se subtrairmos o volume dos cones do volume do cilindro equilátero, o que acontece?

Qual é o volume dos cones? Considere a figura a seguir:



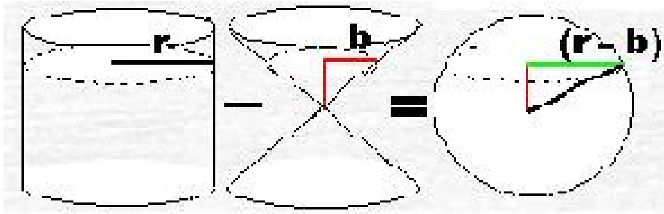
Pela figura temos que o volume dos cones é $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r$, logo o volume dos dois cones, ou seja, o volume da ampulheta é:

$$V_{ampulheta} = \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot r$$

E o volume do cilindro que é:

$$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot r$$

Considere agora os seguintes sólidos da figura. Eles estão cortados por um plano paralelo à base numa mesma altura para os três sólidos:



Perceba que o raio do cilindro é constante.

Onde **r** é o raio do cilindro, **b** raio da secção na ampulheta e **(r-b)** é o raio da esfera.

Obs: Quando **b** é igual a **r**, a esfera não tem raio (estamos "olhando" para o polo). Quando a ampulheta não tem raio (ou seja, quando **b**=0) o raio da esfera é máximo.

A partir daí, se analisarmos com cuidado, conseguimos deduzir que o volume da esfera será:

$$V_{esfera} = V_{cilindro} - V_{ampulheta}$$
$$V_{esfera} = \pi r^2 \cdot 2r - \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot r$$

Portanto,

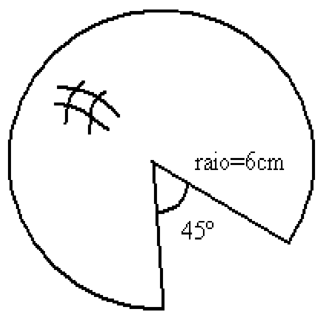
$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Que é o volume da esfera que havíamos enunciado.

EXERCÍCIOS

1. Calcule o volume e a área superficial de uma esfera de diâmetro 6cm.

2. Uma esfera é cortada conforme a figura. Qual é o volume do sólido após o corte?



3. (CESGRANRIO) Uma laranja pode ser considerada uma esfera de raio R, composta por 12 gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo é:

a) $2\pi R^2$
b) $4\pi R^2$
c) $3/4 \cdot \pi R^2$
d) $3\pi R^2$
e) $4/3 \cdot \pi R^2$

4. A fábrica de Chocolates Wonka deseja fazer um bombom esférico de chocolate comum de raio 5 cm com um recheio de chocolate branco no formato de uma bolinha de raio 2 cm. Supondo que cada centímetro cúbico de chocolate pesa 0,5 g. Quantos gramas, aproximadamente, de chocolate comum terá o bombom? Utilize $\pi = 3{,}14$.
a) 11g
b) 22g
c) 33g
d) 44g
e) 55g

5. (MAUÁ) Um cone e um cilindro, ambos retos, possuem o mesmo volume e bases idênticas. Sabendo-se que ambos são inscritíveis em uma esfera de raio R, então a altura H do cone será igual a:
a) 6/5 R
b) 3/2 R
c) 4/3 R
d) 2/3 R
e) 7/5 R

6. (VUNESP) Uma esfera E de raio r está inscrita em um cubo e outra F está circunscrita a esse mesmo cubo. Então a razão entre os volumes e F e de E é igual a:

a) $\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ d) $3\sqrt{3}$ e) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

7. Supondo a superfície da Terra esférica com circunferência meridiana de 40.000km, a área de um fuso horário é de:

9. ESTATÍSTICA

INTRODUÇÃO

Toda pesquisa científica, em quase todas as áreas, tem em comum as seguintes etapas:

1. Coleta de dados, através de uma amostra da população;
2. Análise descritiva com o resumo e a interpretação de dados;
3. Escolha de um modelo que explique o fenômeno (inferência).

A ciência responsável por esse tipo de estudo é a Estatística. Além de trabalhos científicos ela também está presente nos meios de comunicação e em nosso cotidiano de forma visível.

VARIÁVEL

Um colégio está interessado em traçar um perfil de seus alunos dos cursos do 2º grau. Para isso, escolheu uma equipe de pesquisadores que definiu seis diferentes objetos de estudo: sexo, idade, área da carreira universitária pretendida, número de irmãos, disciplina favorita e renda familiar mensal. A investigação dos itens acima permitirá à equipe traçar o perfil desejado.

Para isso, a equipe entrevistou 20 alunos do colégio, os quais transmitiram as informações pedidas. Os resultados estão apresentados na tabela a seguir.

Sexo	Idade	Área da Carreira Universitária Pretendida	Número de Irmãos	Disciplina Favorita	Renda Familiar Mensal (salários Mínimos)
M	16	Humanas	2	História	5,2
M	17	Biológicas	3	Biologia	5,8
F	25	Humanas	4	Geografia	8,3
M	19	Exatas	2	Matemática	4,5
F	19	Exatas	1	Geografia	9,6
F	25	Biológicas	3	Química	4,8
M	25	Biológicas	2	Biologia	5,6
M	22	Exatas	3	Português	11,6
M	19	Humanas	1	Português	10,7
F	21	Biológicas	0	Química	9,3
F	20	Humanas	2	História	6,3
M	17	Humanas	1	Matemática	5,9
M	16	Humanas	3	História	5,4
F	16	Humanas	2	Geografia	7,2
F	16	Biológicas	4	Matemática	6,2
F	16	Humanas	0	Geografia	4,8
M	18	Exatas	3	Matemática	8,0
M	17	Exatas	4	Física	6,1
M	22	Biológicas	4	Química	5,4
M	18	Biológicas	1	Física	8,7

Cada um dos diferentes objetos acima estudados, que permitirão fazer a análise desejada, é denominado variável.

Algumas variáveis, como sexo, área da carreira universitária pretendida e disciplina favorita, apresentam como resultado uma qualidade (atributo) ou preferência do estudante entrevistado. Variáveis dessa natureza recebem o nome de variáveis qualitativas. Se considerarmos, por exemplo, a variável área da carreira universitária pretendida, diremos que exatas, humanas e biológicas correspondem às realizações dessa variável.

Outras variáveis, como idade, número de irmãos e renda familiar mensal, apresentam como resposta um número real, resultante ou de contagem ou de mensuração. Variáveis assim definidas são chamadas variáveis quantitativas. Estudando a variável número de irmãos, por exemplo, dizemos que 0, 1, 2, 3 ou 4 são as realizações ou valores assumidos por essa variável.

TABELAS DE FREQUÊNCIA

A simples observação dos dados brutos apresentados na tabela anterior não nos permite explicar o comportamento das variáveis em estudo.

Um primeiro passo a ser dado, na obtenção de informações mais resumidas e precisas a respeito do comportamento das variáveis, é a construção de tabelas de frequência.

Para cada variável estudada, contamos o número de vezes que ocorre cada uma de suas realizações (ou valores). O número obtido é chamado frequência absoluta e indicado por n_i (cada realização de uma variável apresenta um valor para n_i).

Considerando as realizações da variável área da carreira pretendida, temos os seguintes valores de n_i:

- Humanas: 8
- Biológicas: 7
- Exatas: 5

A frequência absoluta não é uma medida muito conveniente para análise dos dados, especialmente nos casos em que se deseja comparar a distribuição de uma mesma variável ao longo de populações diferentes (poderíamos estar interessados em comparar a carreira pretendida por estudantes em diferentes colégios). Assim, precisamos definir uma medida que leve em consideração o número total de observações colhidas.

Para isso, definimos a frequência relativa como a razão entre a frequência absoluta e o número total de observações, isto é:

(indica-se por f_i) (n_i)

$$\boxed{f_i = \frac{n_i}{n}}$$

Onde,

$f_i =$ frequência relativa;

$n_i =$ frequência absoluta;

$n =$ número total de observações.

Como $n_i \le f_i \le 1$, é comum expressar f_i em porcentagem.

Exemplo 1

Para a variável área da carreira universitária pretendida, construímos a seguinte tabela de frequência:

Área da Carreira Universitária pretendida	Frequência Absoluta (n_i)	Frequência Relativa (f_i)	Porcentagem
Humanas	8	8/20 = 0,4	40%
Biológicas	7	7/20 = 0,35	35%
Exatas	5	5/20 = 0,25	25%
Total	20	1,00	100%

A construção das tabelas de frequência para as demais variáveis do exemplo acima é análoga. Muitas vezes, porém pode ocorrer que os valores assumidos por uma variável quantitativa variem em determinado intervalo real, não havendo, praticamente, repetição de valores. Por exemplo, os valores da renda familiar mensal da tabela anterior variam no intervalo [8,19[(em salários mínimos). Nesse caso, construímos a tabela de frequência em classes ou intervalos de valores.

Exemplo 2

Vejamos a tabela de frequência para a variável renda familiar mensal (em salários mínimos):

Classes de Valores	**Frequência Absoluta (n_i)**	**Frequência Relativa (n_i/n)**	**Porcentagem**
8 ├─ 10	2	0,10	10%
10 ├─12	6	0,30	30%
12 ├─ 14	7	0,35	35%
14 ├─16	2	0,10	10%
16 ├─18	2	0,10	10%
18 ├─ 20	1	0,05	5%
Total	20	1,00	100%

Observações:

- A notação a ├─ b refere-se ao intervalo real [a, b[, que inclui *a* mas não inclui *b* .
- A amplitude da classe a ├─ b é dada pela diferença b – a . No exemplo anterior, a amplitude de cada uma das classes é igual a 2.
- Não há regras fixas para a construção das classes da tabela anterior, a partir dos dados brutos. Dependendo da natureza dos dados, podemos ter um número maior ou menor de classes. Procuraremos, na medida do possível, construir classes de mesma amplitude e evitaremos, apenas, considerar classes de amplitude muito grande ou muito pequena, a fim de que não haja comprometimento na análise.

EXERCÍCIOS

Os próximos três exercícios referem-se ao exemplo apresentado no início do capítulo.

1. Construa uma tabela de frequência para a variável "sexo".

2. Construa uma tabela de frequência para a variável "número de irmãos".

3. Construa uma tabela de frequência para a variável "disciplina favorita".

4. A tabela abaixo se refere a uma pesquisa realizada com 200 alunos de uma escola, a respeito do esporte preferido:

Esporte	Frequência Absoluta (ni)	Frequência Relativa (ni/n)	Porcentagem
Futebol	108		
Vôlei		0,21	
Basquete			
Natação	12		
Outros			8,5%
Total	200	1,00	100%

Complete os espaços da tabela.

5. As notas obtidas por 20 alunos de uma turma em uma prova de redação estão abaixo relacionadas:

3,3 - 4,2 – 2,1 – 5,6 – 6,2 – 7,4 – 4,8 – 1,9
8,0 – 4,8 – 6,5 – 3,2 – 3,5 – 8,6 – 4,5
3,8 – 5,3 – 1,2 – 5,4 – 9,3

a) Agrupe os dados em seis classes de intervalo, cada uma com amplitude 1,5 a partir da nota 1,0,e faça uma tabela de frequência.

b) Qual a porcentagem de alunos com nota menor ou igual a 4?

6. Deseja-se através de um questionário distribuído em uma empresa, obter informações sobre alguns aspectos sociais de seus funcionários. Entre outras questões, pesquisou-se o estado civil e há quanto tempo o funcionário trabalha na empresa. Foram selecionados, ao acaso, 15 questionários, com os resultados relacionados a seguir:

Funcionário	**Estado Civil**	**Tempo na Empresa (em anos)**
1	Solteiro	2
2	Casado	3
3	Solteiro	2
4	Solteiro	1
5	Solteiro	5
6	Casado	4
7	Casado	4
8	Divorciado	6
9	Solteiro	2
10	Divorciado	5
11	Solteiro	4
12	Casado	1
13	Casado	5
14	Divorciado	3
15	Solteiro	2

a) Classifique a variável estado civil e construa uma tabela de frequência.

b) Classifique a variável tempo na empresa e construa uma tabela de frequência.

c) Qual a porcentagem de funcionários que tem no máximo três anos de trabalho nessa empresa?

d) Qual a porcentagem de funcionários que possuem pelo menos cinco anos de serviço nessa empresa?

MEDIDAS DE CENTRALIDADE

Vamos estabelecer para dados medidas (números) que sejam representativas, isto é, que resumam como se distribuem os valores de uma variável quantitativa. Para isso, será necessário estabelecer um valor médio ou central e outro valor que indique o grau de variabilidade (em torno do valor central) dos dados da variável em estudo.

MÉDIA ARITMÉTICA

Sejam x_1, x_2, ..., x_n os valores de *n* observações de determinada variável X. definimos a média aritmética - indicada por x - como a razão entre a soma de todos os valores observados e o número total de observações:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1} x_i$$

Exemplo 1

As notas finais de 15 alunos de um curso de computação estão apresentadas abaixo. Qual a média das notas obtidas?
7,5 – 9,0 – 4,5 – 4,0 – 5,5 – 8,0 – 8,5 – 9,0 – 7,5 – 7,5 – 7,0 – 6,5 – 7,5 – 9,0 – 6,5
Temos:

$$x = \frac{7,5 + 9,0 + 4,5 + ... + 6,5}{15} = \frac{107,5}{15} \cong 7,17$$

Assim a nota média da classe é 7,17.

A média aritmética é a medida de centralidade mais amplamente usada no cotidiano – aparece no cálculo de aproveitamento escolar, em pesquisas de opinião pública, nos índices referentes nos índices referentes à saúde, educação, etc.

Exemplo 2

Os dados abaixo se referem ao tempo de vida útil, em anos, de determinado aparelho eletrônico:

5 – 5 – 6 – 4 – 20

Calculando a média aritmética , temos:

$$x = \frac{5 + 5 + 6 + 4 + 20}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

Assim, concluímos que, em média, a vida útil desse aparelho é de 8 anos.

Porém, o cálculo dessa medida foi muito influenciado por uma observação discrepante (20 anos), o que provocou uma distorção no tempo médio de vida.

De modo geral, quando há dados discrepantes em um conjunto de observações, a média aritmética não é uma medida muito apropriada para análise dos dados.

Para contornar problemas dessa natureza, definiremos, a seguir, uma medida de centralidade mais "resistente" às observações discrepantes, denominada mediana.

MEDIANA

Sejam $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x$ os *n* valores ordenados de uma variável x. A mediana – indicada por Me – é o valor central desse conjunto de valores.

Notemos que a mediana é o valor tal que o número de observações menores (ou iguais) a ela é igual o número de observações maiores (ou iguais) a ela.

Exemplo 3

O controle de qualidade de uma industria forneceu o seguinte número de peças defeituosas (por lote de 100 unidades):

5 – 4 – 9 – 6 – 3 – 8 – 1 – 4 – 5 - 6 – 11

Vamos determinar a mediana do número de peças defeituosas. Para isso, ordenamos esses valores:

1 – 3 – 4 – 4 – 5 –5 – 6 – 6 – 8 – 9 – 11 (*)

como n = 11 é impar, temos Me = x_6 , isto é, a mediana é igual a 6ª observação de (*). Assim, Me = 5.

Podemos observar, por fim, que há cinco valores menores (ou iguais) a 5 e cinco valores maiores (ou iguais) a 5.

$$1-3-4-4-5-\underset{\substack{\downarrow \\ Me}}{5}-6-6-8-9-11$$

Exemplo 4

As temperaturas máximas diárias de uma cidade, no inverno, foram medidas durante 10 dias:

21° C – 17° C – 19° C – 25 °C – 26° C
19 °C – 16°C – 15°C – 15°C – 18°C

Determinemos a mediana das temperaturas:

Com n = 10 é par, temos Me = x_5 + x_6 /2 , isto é, a mediana é a média entre a 5ª e a 6ª observações, quando elas estão ordenadas. Assim:

15°C – 15°C –16°C –17° C **– 18°C - 19 °C –** 19 °C - 21° C – 25 °C – 26° C

Os valores em negrito indicam que são os valores centrais, assim:

$$Me = \frac{18 + 19}{2} = \frac{37}{2} = 18,5$$

Portanto a mediana é 18°C

MODA

Moda de um conjunto de valores – indicada por Mo – é a realização mais frequente entre os valores observados.

Exemplo 5

Vamos encontrar a moda dos seguintes conjuntos de valores:

a) 5 – 8 – 11 – 8 – 3 – 4 – 8

a moda é Mo = 8, pois há três observações iguais a 8.

b) 2 – 3 – 9 – 3 – 4 – 2 - 6

há duas modas : 2 e 3. Dizemos que se trata de uma distribuição *bimodal.*

c) 1 – 3 – 4 – 6 – 9 – 11 – 2

nesse caso, todos os valores “aparecem” com a mesma frequência unitária. Assim, não há moda nessa distribuição.

MEDIDAS DE DISPERSÃO

Suponhamos que um professor esteja interessado em comparar o desempenho de suas diferentes turmas de um mesmo curso de inglês. Para isso, considerou a média final dos cinco alunos de suas quatro turmas:

- turma A: 5 – 5 – 5 – 5 - 5
- turma B: 5 – 6 –5 – 4 – 5
- turma C: 3 – 7 – 6 – 5 - 4
- turma D: 1 – 8 – 5 – 2 - 9

se calcularmos as médias aritméticas das notas de cada uma das turmas, notaremos, nos quatro casos, que a média da turma é igual a 5. Restringindo nossa análise a apenas esse valor, concluiremos que as turmas apresentam desempenho médio igual. Isso, porém, não é suficiente, pois esse valor esconde informações em relação à homogeneidade ou heterogeneidade do desempenho dos alunos de uma mesma turma. Daí a necessidade de se definir uma medida que revele o grau de variabilidade das notas de uma turma, a fim de que a análise não fique comprometida.

VARIÂNCIA

Sejam x_1, x_2, ..., x_n os valores assumidos por uma variável X e x a média aritmética desses valores. Chamamos variância de X – indicada por Var(X) – ao número real positivo:

$$Var(X) = \frac{(x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + ... + (x_n - x)^2}{n}$$

Notemos que cada termo do numerador corresponde ao quadrado da diferença entre um valor observado e o valor médio. Essa diferença traduz “o quanto um valor observado se distancia do valor médio”, sendo, portanto, uma medida do grau de variabilidade dos dados em estudo.

Se considerarmos o exemplo inicialmente apresentado, temos:

- turma A: x = 5

$$Var(x) = \frac{(5-5)^2 + (5-5)^2 + ... + (5-5)^2}{5} = 0$$

O valor nulo da variância indica que todos os alunos apresentaram desempenho idêntico.

- turma B: x = 5

$$Var(x) =$$
$$= \frac{(5-5)^2 + (6-5)^2 + (5-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2}{5}$$
$$= \frac{0+1+0+1+0}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

O valor “muito pequeno” encontrado para a variância indica que nessa turma os alunos apresentaram desempenhos muito próximos

- turma C x = 5

$$Var(x) =$$
$$= \frac{(3-5)^2 + (7-5)^2 + (6-5)^2 + (5-5)^2 + (4-5)^2}{5}$$
$$= \frac{4+4+1+0+1}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

Esse valor revela um grau de heterogeneidade moderado, não havendo, porém, alunos com desempenhos muito discrepantes.

- Turma D : x = 5

$$Var(x) =$$
$$= \frac{(1-5)^2 + (8-5)^2 + (5-5)^2 + (2-5)^2 + (9-5)^2}{5}$$
$$= \frac{16+9+0+9+16}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

O valor “grande” encontrado para a variância nos evidencia a presença de alunos com desempenhos extremos – ou muitos bons ou muito ruins.

Observação

A variância é definida como uma soma de quadrados, sendo, portanto, uma medida quadrática. Por exemplo, se estivéssemos estudando a altura dos alunos de uma turma, a altura média seria expressa em metros(m), porém a variância seria expressa em metros ao quadrado (m^2), o que geraria uma incompatibilidade em relação às unidades. Para uniformizá-las, definiremos o desvio padrão.

DESVIO PADRÃO

Chamamos de desvio padrão de X - indicado por DP(X) a raiz quadrada de sua variância:

$$DP(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Exemplo

Calculando o desvio padrão de cada uma das turmas do problema anterior, obtemos:

- Turma A:

$$Var(X) = 0 \Rightarrow DP(X) = \sqrt{0} = 0$$

- Turma B:

$$Var(X) = 0 \Rightarrow DP(X) = \sqrt{0,4} \cong 0,632$$

- Turma C:

$$Var(X) = 0 \Rightarrow DP(X) = \sqrt{2} \cong 1,414$$

- Turma D:

$$Var(X) = 0 \Rightarrow DP(X) = \sqrt{10} \cong 3,162$$

EXERCÍCIOS

7. (FUVEST – 2003) Para que fosse feito um levantamento sobre o número de infrações de trânsito, foram escolhidos 50 motoristas. O número de infrações cometidas por esses motoristas, nos últimos cinco anos, produziu a seguinte tabela:

Nº de infrações	Nº de motoristas
de 1 a 3	7
de 4 a 6	10
de 7 a 9	15
de 10 a 12	13
de 13 a 15	5
maior ou igual a 16	0

Pode-se então afirmar que a média do número de infrações, por motorista, nos últimos cinco anos, para este grupo, está entre:
a) 6,9 e 9,0 b) 7,2 e 9,3 c) 7,5 e 9,6
d) 7,8 e 9,9 e) 8,1 e 10,2

8. (FUVEST – 2000) Uma prova continha cinco questões, cada uma valendo 2 pontos. Em sua correção, foram atribuídas a cada questão apenas as notas 0 ou 2, caso a resposta estivesse, respectivamente, errada ou certa. A soma dos pontos obtidos em cada questão forneceu a nota da prova de cada aluno.

Questão	1	2	3	4	5
% de acerto	30%	10%	60%	80%	40%

Logo, a média das notas da prova foi:

a) 3,8
b) 4,0
c) 4,2
d) 4,4
e) 4,6

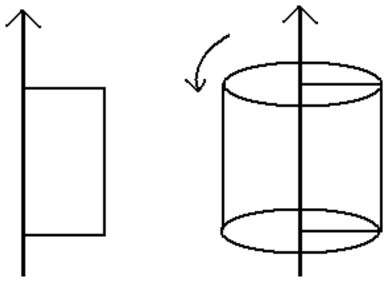
9. (VUNESP – 2004) Sejam dois bairros, A e B, de certa cidade. O bairro A possui 1 000 residências, sendo o consumo médio mensal de energia elétrica por residência 250 kWh. Já o bairro B possui 1500 residências, sendo o consumo médio mensal por residência igual a 300 kWh. O consumo médio mensal de energia elétrica por residência, considerando os dois bairros, A e B, é
a) 275 kWh. b) 280 kWh. c) 287,5 kWh.
d) 292,5 kWh. e) 550 kWh.

FRENTE TRÊS

10. CILINDRO

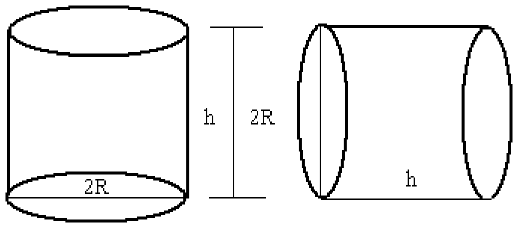
Cilindro é o poliedro análogo ao prisma, mas a sua base é um círculo.

Cilindro de Revolução é o objeto formado pela rotação completa e um retângulo em torno de um eixo contido em um de seus lados. Porém mais popularmente falando, cilindro é a forma de um cano, um tubo, uma lata.

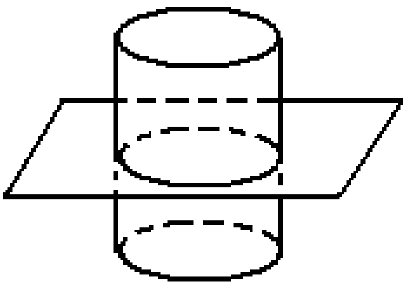


CILINDRO EQUILÁTERO

Chamamos de cilindro equilátero, quando o diâmetro de sua base é igual à sua altura, ou seja, $h = 2R$. É como se fosse uma lata que tem a mesma altura, estando de pé ou deitada.

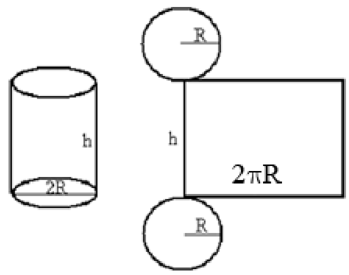


Uma secção transversal de um cilindro é a intersecção dele com um plano paralelo às bases e, neste caso, será exatamente igual à base.



ÁREA DA SUPERFÍCIE

Assim como fizemos anteriormente, podemos imaginar que um cilindro de cartolina e desmontá-lo, como na figura a seguir:



Na figura anterior, chamamos a área do retângulo formado de área lateral e dos círculos de área da base.

A área total da superfície é soma das áreas das bases com a areal lateral. Desta forma:

$$A_T = A_l + 2 \cdot A_b$$

Ora, também podemos calcular diretamente a área total da superfície pois sabemos que $A_l = 2\pi R \cdot h$ e $A_b = \pi R^2$, então:

$$A_T = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(h + R)$$

VOLUME DO CILINDRO

O volume é dado pelo produto da Área da Base pela altura do cilindro:

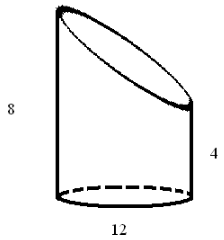
$$V = A_b \cdot h$$

Como a base do cilindro é uma circunferência, temos que $A_b = \pi r^2$, ou seja, podemos escrever o volume como:

$$V = \pi r^2 h$$

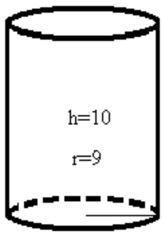
EXERCÍCIOS

1. O cilindro seguinte teve um corte transversal. Calcule o seu volume.

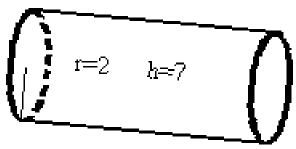


2. Calcule a área total e o volume dos seguintes cilindros. A altura h e o raio r da base estão dados.

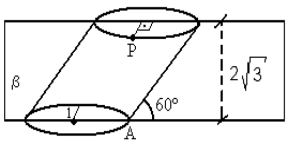
a)



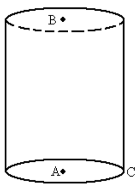
b)



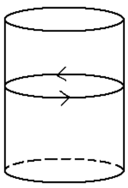
3. (FUVEST - 2003) Um cilindro oblíquo tem raio igual a 1, altura $2\sqrt{3}$ e está inclinado de um ângulo de 60º (ver figura). O plano β é perpendicular às bases do cilindro, passando por seus centros. Se P e A são os pontos representados na figura, calcule PA.



4. (FUVEST 2001) Na figura abaixo. Têm-se um cilindro circular reto, onde A e B são os centros das bases e C é um ponto da intersecção da superfície lateral coma base inferior. SE D é o ponto do segmento BC, cujas distâncias a AC e AB são ambas iguais a d, obtenha a razão entre o volume do cilindro e sua área total em função de d.



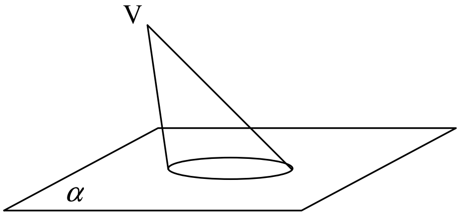
5. Uma lata de refrigerante de 350ml tem aproximadamente 12 cm de altura. Uma formiga dá uma volta na lata conforme a figura e anda aproximadamente 12,56cm.
Com isso quantos centímetros cúbicos, aproximadamente, ocupa 1ml de refrigerante? (Use π =3,14)



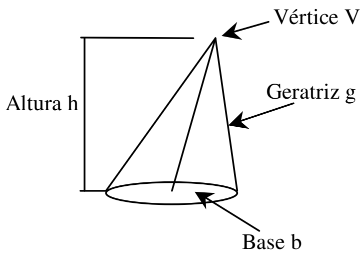
a) 1/3cm³.
b) 2/3cm³.
c) 1/2cm³.
d) 3/7cm³.
e) 5/7cm³.

11. CONE

Um cone é a união de todos os segmentos formados por um ponto V e os pontos de uma circunferência contida em um plano α, sendo que $V \notin \alpha$. Observe a figura:

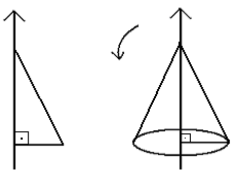


ELEMENTOS DO CONE

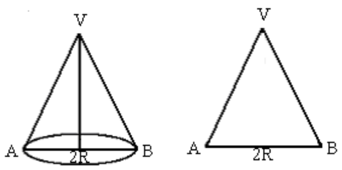


Cone de Revolução

O cone de revolução é gerado pela rotação de triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos.



Um cone é dito equilátero quando a distância do vértice até um ponto da borda da base é igual ao diâmetro da base, ou seja, 2R. Tente notar que, visto de frente, um cone equilátero parece um triângulo equilátero.

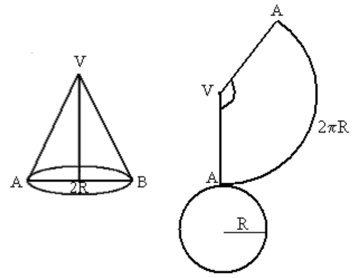


VA = VB = AB = 2R

Observação: A altura do cone equilátero não é igual ao diâmetro da base. Sua altura é igual à altura de um triângulo equilátero que tem como lado o diâmetro da base do cone.

ÁREA DA SUPERFÍCIE

Se imaginarmos um cone de cartolina, podemos recorta-lo sobre uma geratriz. Assim:



A área total é sua área da base mais a área lateral A_l que é uma parte de um círculo cujo arco mede $2\pi R$ e $g = VA$. Sabemos que a área de um setor circular está para a área do círculo assim como o comprimento do arco está para o comprimento da circunferência. Deste modo:

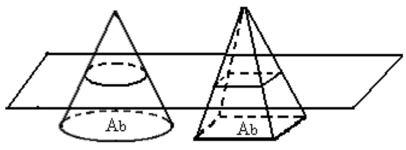
Temos que:

$$\frac{A_l}{2\pi R} = \frac{A_{círculo}}{2\pi g} \Rightarrow A_l = \frac{\pi g^2 \cdot 2\pi R}{2\pi g}$$

$$A_l = \pi R g$$

VOLUME

Para o volume usaremos o Princípio de Cavalieri que diz que se um sólido tem secções transversais de mesma área que as do outro, então eles possuem volumes iguais.



Se, como na figura anterior, tivermos uma pirâmide com área da base igual à do cilindro. Com isso, temos que as secções transversais também têm mesma área, portanto o volume do cone será igual ao da pirâmide, ou seja:

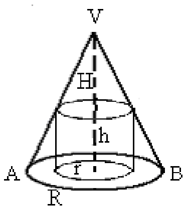
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Como $A_b = \pi r^2$, então:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

EXERCÍCIOS

1. Num cone circular reto de altura H e raio R está inscrito um cilindro circular reto de altura h e raio r, conforme a figura. Sejam V e v os volumes do cone e do cilindro, respectivamente. Se a relação entre os raios do cone e do cilindro for R=4r, então a relação entre os seus volumes é:



a) V = 36v
b) V = 16v
c) V = 64/3 v
d) V = 64v
e) V = 64/9 v

2. (ITA 2002) Seja S a área total da superfície de um cone circular reto de altura h, e seja m a razão entre as áreas lateral e da base desse cone. Obtenha uma expressão que forneça h em função apenas de S e m.

3. (PUC-SP) O volume de um cone equilátero circunscrito a uma esfera de raio R, é:
a) πR^3
b) $2\pi R^3$
c) $3\pi R^3$
d) $4\pi R^3$
e) $5\pi R^3$

4. (FUVEST) Um cone e um cilindro de revolução tem a mesma altura e são equivalentes. A área lateral do cilindro é igual à área do cone. O volume do cone, em função de seu raio R, é:

a) $\frac{3\pi\sqrt{3}}{4}R^3$ b) $2\pi\sqrt{3}R^3$ c) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}R^3$ d) $\frac{3\pi}{4}R^3$ e) nda

12. INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ANALÍTICA ESPACIAL

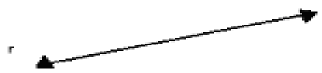
A Geometria espacial é somente a continuidade natural do estudo da geometria plana. Como vivemos num mundo tridimensional, seria insensato estudarmos as formas de tudo o que nos cerca somente num plano; enfim, agora vamos "sair do papel" e estudar a geometria no espaço, mais próximo à nossa realidade.

Para tal, vamos apresentar o que os geômetras — os especialistas em geometria — chamam de propriedades, que são basicamente as leis da geometria. Cada vez que damos um passo, vamos colecionando estas propriedades e, através delas, vamos montando todo um ramo da matemática.

Vejamos algumas noções iniciais:

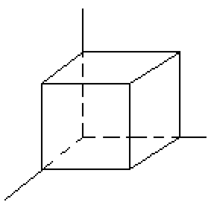
- Ponto: não tem dimensões.

- Reta: possui comprimento, mas não possui largura nem altura.



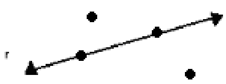
- Plano: possui comprimento e largura, mas não possui espessura.

- Espaço: possui comprimento, largura e espessura.

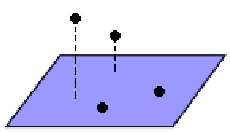


Vamos agora revisar e definir algumas propriedades:

P.1) numa reta e fora dela existem tantos pontos quanto quisermos.

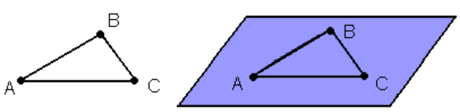


P.2) num plano e fora dele existem tantos pontos quanto quisermos.

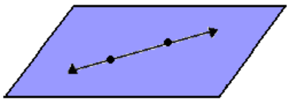


P.3) dois pontos distintos determinam uma única reta.

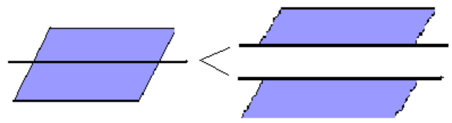
P.4) três pontos não-colineares determinam um único plano.



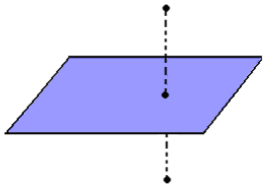
P.5) uma reta que possui todos os pontos distintos num plano, está neste plano.



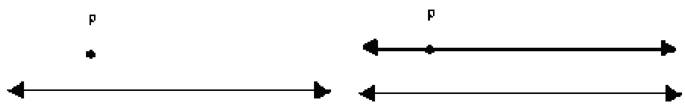
P.6) uma reta de um plano separa-o em dois semi-planos, e a reta é a origem dos dois semi-planos.



P.7) um plano separa o espaço em dois semi-espaços opostos.



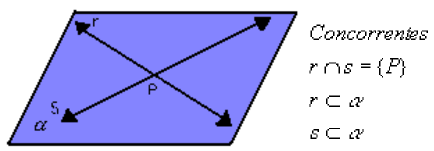
P.8) dada uma reta e um ponto fora dela, há somente uma reta que passa por este ponto paralela à reta dada.

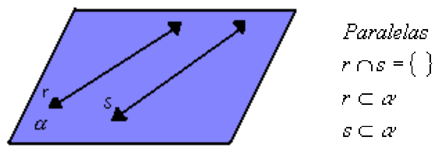


As posições relativas entre duas retas no espaço

Se temos duas retas distintas e coplanares, elas podem ser:

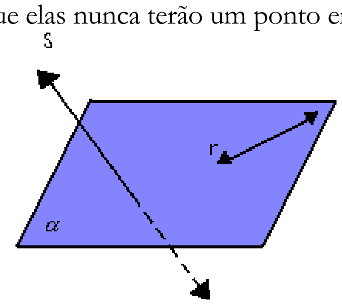
- concorrentes: se possuírem apenas um ponto em comum;
- paralelas: se não possuírem nenhum ponto em comum.





Observação

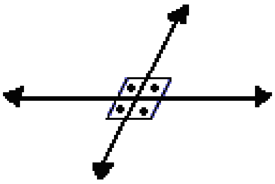
Se duas retas coplanares possuírem mais de um ponto em comum, então elas são paralelas e coincidentes, ou seja, são a mesma reta. Se temos duas retas distintas e não-coplanares, então elas nunca serão paralelas, e serão chamadas de retas reversas. Além disso note que elas nunca terão um ponto em comum.



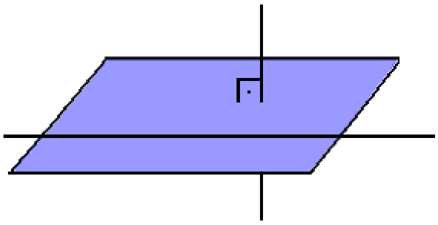
- Reversas
- $r \cap s = \{\ \}$
- NÃO existe plano que contenha r e s simultaneamente

AS RETAS PERPENDICULARES E AS RETAS ORTOGONAIS

Duas retas são perpendiculares quando elas têm um ponto em comum e formam um ângulo de 90º.

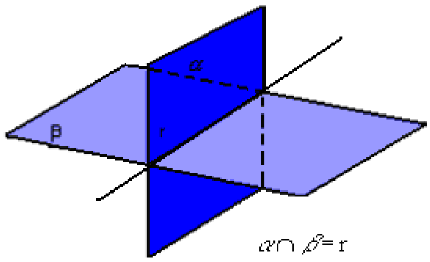


Duas retas são ortogonais quando elas não têm nenhum ponto em comum, mas uma delas forma um ângulo de 90º com alguma reta paralela à outra.



A INTERSECÇÃO ENTRE PLANOS

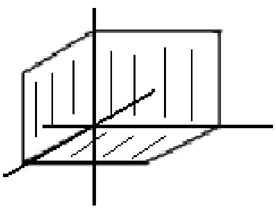
Assim como vimos anteriormente, a intersecção de duas retas formam um ponto. Analogamente, a intersecção de dois planos distintos e concorrentes será uma reta. São chamados também de "planos secantes'.



Desenvolvendo esta ideia, podemos estender para a intersecção de três planos; se tivermos três planos distintos e secantes, então podem ocorrer dois casos:

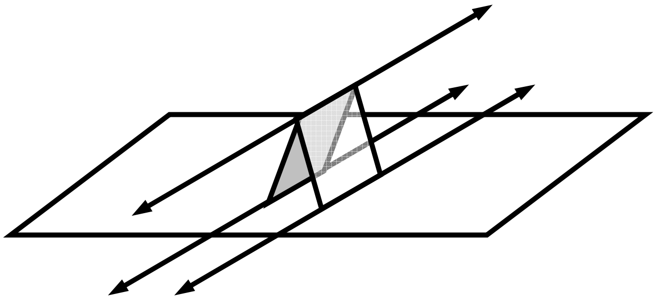
- as retas de intersecção dos planos concorrem num mesmo ponto.

Neste caso é só imaginar um canto de uma sala em que os planos são o chão e duas paredes; as intersecções das retas será um ponto.



- as retas de intersecção dos planos são duas a duas paralelas.

Para visualizarmos, basta imaginar que seus três planos são duas cartas de baralho apoiadas, uma na outra, sobre uma mesa; as retas de intersecção entre as cartas e a mesa serão paralelas.



EXERCÍCIOS

1. Assinale Verdadeiro (V) ou Falso (F).
(   ) Dado um ponto, existe uma reta que o possui.
(   ) Dados dois pontos distintos, existe um único plano passando por esses.
(   ) Numa reta há infinitos pontos.
(   ) Fora de um plano há infinitos pontos.
(   ) Três pontos distintos determinam um único plano.
(   ) Os vértices de um triângulo são coplanares.
(   ) Se três pontos são coplanares, então eles são colineares.

2. Assinale Verdadeiro (V) ou Falso (F).
(   ) Dado um ponto P, existe uma única reta passando por ele.
(   ) Dados dois pontos distintos , existe um plano que os possui.
(   ) Três pontos, não em linha reta, determinam um plano.
(   ) Uma reta separa o espaço em dois semi-espaços.
(   ) Existe um único plano que contém um triângulo dado no espaço.
(   ) O plano contém infinitas retas,
(   ) Uma reta qualquer separa o plano em dois semi-planos.

3. (Fuvest) Sejam r e s duas retas distintas. Podemos afirmar sempre que:
a) existe uma reta que é perpendicular a r e s.
b) existe uma reta que é paralela a r e s.
c) r e s determinam um plano.
d) existe um plano que contém s e não intercepta r.
e) existe um plano que contém r e um único ponto de s.

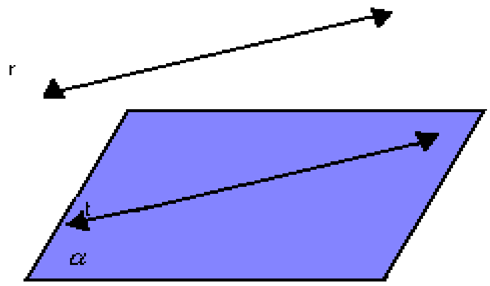
4. (Cescem) Quatro pontos distintos e não-coplanares determinam exatamente:
a) 1 plano.
b) 2 planos.
c) 3 planos.
d) 4 planos.
e) 5 planos.

13. O PARALELISMO E A PERPENDICULARIDADE

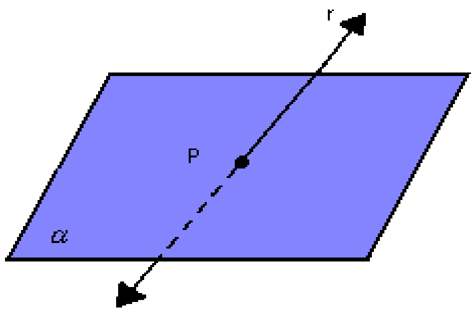
AS POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E PLANO

Já sabemos que duas retas são paralelas quando existe um plano que contém estas duas retas e elas não possuem nenhum ponto em comum ou elas são coincidentes.

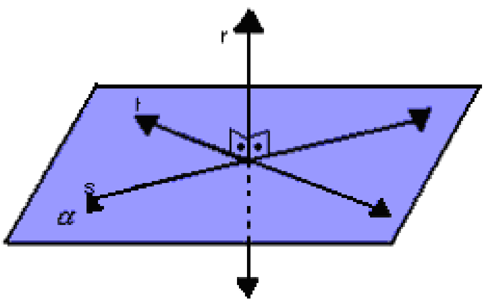
No entanto, quando é que uma reta seria paralela a um plano? É bem simples essa resposta, quando neste plano existe uma reta que é paralela à reta dada! Ou de outra maneira, quando a reta e o plano não possuem nenhum ponto em comum.



Quando a reta cruza o plano, dizemos que a reta é secante ou transversal ao plano.



Quando a reta secante forma um ângulo de 90º com duas retas distintas do plano, dizemos que esta reta é perpendicular ao plano.



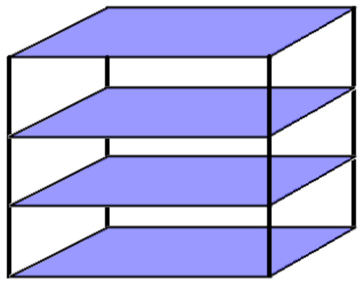
Observação

Quando a reta for perpendicular ao plano, ela será perpendicular a todas as retas contidas neste plano. Portanto uma reta em relação a um plano pode ser classificada como:

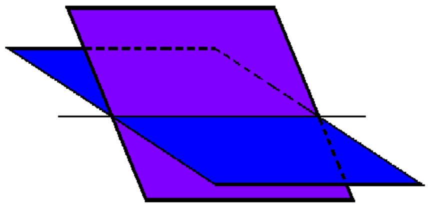
- reta paralela ao plano;
- reta contida no plano;
- reta secante ao plano;
- reta perpendicular ao plano.

AS POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PLANOS

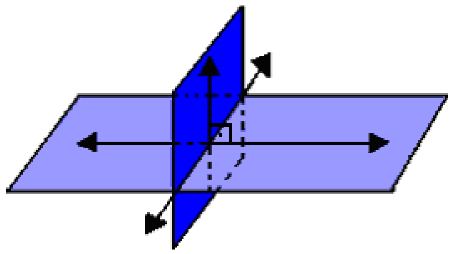
Dois planos distintos serão paralelos quando eles não possuírem nenhum ponto em comum. Para entender isso é só imaginar um prédio, e que o piso de um andar nunca irá encontrar o piso de outro andar, ou seja, os pisos de um prédio são planos paralelos.



Se dois planos paralelos possuírem pelo menos um ponto em comum, significa que eles são planos coincidentes, ou seja, estão no mesmo lugar. Quando dois planos não são paralelos, como eles se cruzam em algum lugar então eles serão chamados de planos secantes e a intersecção entre eles será uma reta.



Se dois planos secantes formarem um ângulo de 90º então os chamaremos de planos perpendiculares.



Portanto dois planos podem ser classificados como:

- planos paralelos;
- planos coincidentes;
- planos secantes;
- planos perpendiculares.

EXERCÍCIOS

1. Assinale Verdadeiro (V) ou Falso (F).
( ) Uma reta e um plano secantes têm um único ponto em comum.
( ) Uma reta e um plano paralelos não têm ponto comum.
( ) Um plano e uma reta secantes têm um ponto comum.
( ) Quando uma reta está contida num plano, eles têm um ponto em comum
( ) Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a qualquer reta do plano.
( ) Se um plano é paralelo a uma reta, qualquer reta do plano é reversa à reta do plano.
( ) Se uma reta é paralela a um plano, existe no plano uma reta concorrente com a reta dada.
( ) Se uma reta é secante a um plano, então a reta é concorrente com qualquer reta deste plano.

2. Assinale Verdadeiro (V) ou Falso (F).
( ) Dois planos perpendiculares a um terceiro, são perpendiculares entre si.
( ) Se dois planos são perpendiculares a um terceiro, então eles são paralelos.
( ) Se dois planos são perpendiculares, então toda reta perpendicular a um deles é paralela ao outro ou está contida neste outro.
( ) Se dois planos são paralelos, todo plano perpendicular a um deles, é perpendicular ao outro.
( ) Uma reta e um plano são paralelos. Se um plano é perpendicular ao plano dado então ele é perpendicular à reta.

3. (ITA) Qual das afirmações abaixo é verdadeira?
a) Três pontos, distintos dois a dois, determinam um plano.
b) Um ponto e uma reta determinam um plano.
c) Se dois planos distintos têm um ponto em comum, tal ponto é único.
d) Se uma reta é paralela a um plano e não está contida neste plano, então ela é paralela a qualquer reta esse plano.
e) Se um plano é determinado por duas retas concorrentes r e s, então toda reta m desse plano, que é paralela à reta r, não será paralela à reta s.

4. (ITA) Quais são as sentenças falsas nos itens abaixo?
I – Se dois planos são secantes, todas as retas de um deles sempre interceptam o outro plano.
II – Sejam dois planos. Se em um deles existem duas retas distintas, paralelas ao outro plano, os planos são sempre paralelos.
III – Em dois planos paralelos, todas a retas de um são paralelas ao outro.
IV – Se uma reta é paralela a um plano, neste existem uma infinidade de retas paralelas àquela reta.
V – Se uma reta é paralela a um plano, será paralela a todas as retas do plano.
a) I, II, III.
b) I, II, V.
c) I, III, IV.
d) II, III, IV.
e) n.d.a.

5. (São Carlos - USP) Dadas três retas a, b e c, duas a duas reversas.
a) Não existe reta alguma que se apoia nas três retas a, b e c.
b) Existe somente três retas que se apoiam em a, b e c.
c) Existe uma única reta que se apoia em a, b e c.
d) Existe uma infinidade de retas que se apoiam em a, b e c.
e) Nenhuma destas afirmações são verdadeiras.

6. (São Carlos - USP) Dadas duas retas reversas r e s, então:
a) existe plano paralelo a ambas.
b) existe um único plano que é paralelo a ambas.
c) todo plano perpendicular a uma, encontra a outra em um ponto.
d) existe sempre plano perpendicular a uma, que contém a outra.
e) r e s são perpendiculares.

7. (Fuvest) Uma reta r não é paralela e nem está contida em um plano α. Provar que existe uma reta s em α que é perpendicular a r.

8. Seja r e s duas retas não paralelas. Então as retas paralelas a r e concorrentes a s:
a) são todas coincidentes.
b) são perpendiculares a r.
c) são perpendiculares a s.
d) são todas concorrentes.
e) estão num mesmo plano.

9. Sejam r e s duas retas reversas, e sejam A e B pontos distintos pertencentes a r e C e D pontos distintos pertencentes a s. As retas AC e BD são:
a) concorrentes.
b) paralelas.
c) reversas.
d) coincidentes.
e) ortogonais.

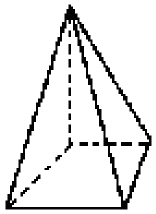
14. POLIEDROS

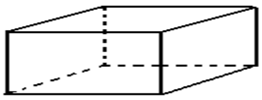
INTRODUÇÃO

Já vimos anteriormente o que é um polígono, uma figura com vários lados e contida num plano. Agora vamos estender isso para "fora do papel", vamos trabalhar com figuras no espaço.

Um poliedro é um objeto no espaço e limitado por polígonos planos.

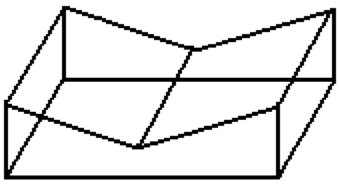
As pirâmides e os paralelepípedos são exemplos de poliedros.





Estudaremos somente o que chamamos de poliedro convexo.

O poliedro convexo é aquele que, para quaisquer dois pontos distintos contidos nele, todos os pontos do segmento de reta entre estes pontos também estarão contidos no poliedro.



Este poliedro não é convexo!

Analogamente aos polígonos, nomeamos os poliedros de acordo com o número de faces.

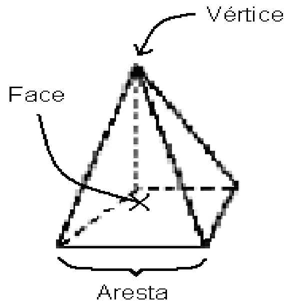
• 4 faces	• Tetraedro
• 5 faces	• Pentaedro
• 6 faces	• Hexaedro
• 7 faces	• Heptaedro
• 8 faces	• Octaedro
• 9 faces	• Eneaedro
• 10 faces	• Decaedro
• 11 faces	• Endecaedro
• 12 faces	• Dodecaedro
• 20 faces	• Icosaedro

Por exemplo, um dado tem seis faces, portanto um dado é um hexaedro; as pirâmides mais conhecidas do Egito têm 5 faces (as quatro laterais mais a sua base), portanto é um pentaedro.

RELAÇÃO DE EULER

Num poliedro qualquer, existem três elementos fundamentais:

- o número de vértices — V.
- o número de arestas — A.
- o número de faces — F.



Percebemos que, no exemplo acima, o poliedro possui cinco lados, portanto é um pentaedro. Além das cinco faces, o pentaedro possui cinco vértices e oito arestas.

Será que existe alguma relação entre esses três objetos? Sim! A relação de Euler, que diz:

$$2 + A = F + V$$

Dica:

Para lembrar de maneira fácil esta relação note que A, F e V estão em ordem alfabética e o número 2 antes das letras.

Curiosidade:

Apesar desta fórmula ser creditada a Leonhard Euler, grande gênio matemático do século XVIII, quem a formulou foi René Descartes, por volta de 1619. Mas quem levou a fama foi Euler...

Voltando ao exemplo anterior, do pentaedro. Temos:

$$2 + A = F + V$$
$$2 + 8 = 5 + 5$$
$$10 = 10$$

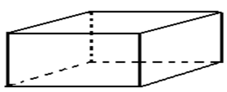
Desta maneira, verificamos a igualdade.

SOMA DOS ÂNGULOS DAS FACES DE UM POLIEDRO CONVEXO

Outra relação interessante é a soma dos ângulos internos das faces de qualquer poliedro, ela só está relacionada com o número de vértices:

$$S = (V - 2) \cdot 360$$

Por exemplo, um tijolo possui oito vértices; portanto, a soma dos ângulos de suas faces é:



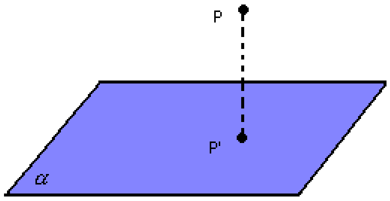
$$S = (8 - 2) \cdot 360$$
$$S = 6 \cdot 360$$
$$S = 2160$$

Note que as faces deste tijolo são quadriláteros, cuja soma dos ângulos é 360º. Como ele tem seis faces, então a soma total é

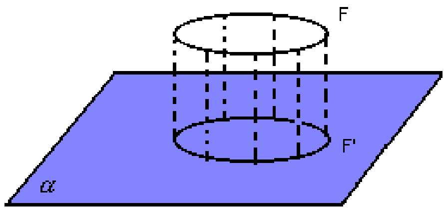
$$6 \cdot 360^\circ = 2160^\circ$$

PROJEÇÃO ORTOGONAL E DISTÂNCIAS

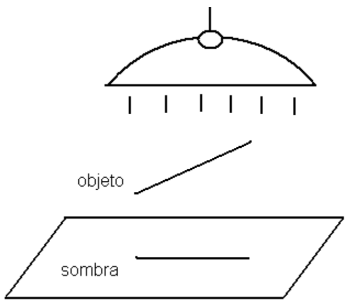
A projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α é a intersecção do plano com a reta perpendicular a ele, conduzida pelo ponto P:



A projeção ortogonal de uma figura geométrica F (qualquer conjunto de pontos) sobre um plano α, é o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos de F sobre α:

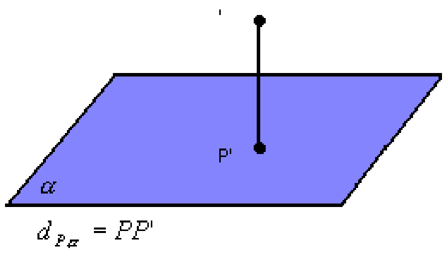


Sempre que quiser visualizar melhor uma projeção, imagine uma luz vinda de cima, como se fosse um holofote no teto apontando para o chão. A projeção é a sombra da figura.

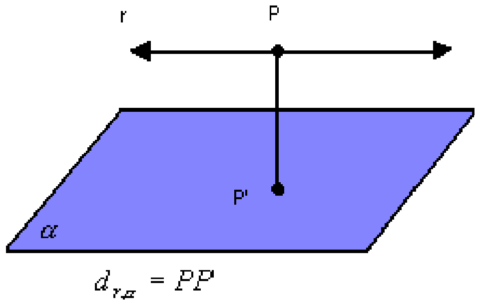


AS DISTÂNCIAS

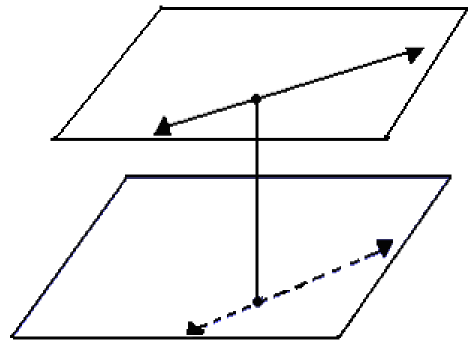
A distância entre um ponto e um plano é a medida do segmento, cujos extremos são o ponto e sua projeção ortogonal sobre o plano:



A distância entre uma reta e um plano paralelo é a distância entre um ponto qualquer da reta e o plano:



A distância entre dois planos paralelos é a distância entre um ponto qualquer de um deles e o outro plano:

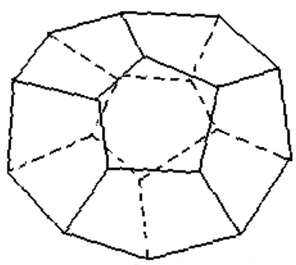


EXERCÍCIOS

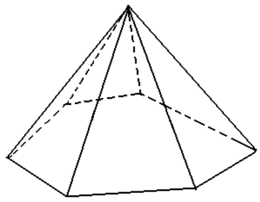
1. Quantas arestas tem um icosaedro com 12 vértices?

2. Qual é o poliedro que possui 6 vértices e 12 arestas?
a) hexaedro.
b) heptaedro.
c) octaedro.
d) eneaedro.
e) decaedro.

3. Sabe-se que um dodecaedro tem todas as suas faces pentagonais. Qual é o número de vértices deste poliedro?
a) 10.
b) 12.
c) 15.
d) 20.
e) 24.



4. Tem-se uma pirâmide com base hexagonal, conforme a figura. Quantas faces, vértices e arestas tem esse poliedro respectivamente?



a) 7, 7 e 12.
b) 7, 7 e 14.
c) 6, 6 e 10.
d) 6, 6 e 12.
e) 6, 7 e 11.

5. Ao meio dia nota-se que a sombra de uma rampa tem 20 m de comprimento; sendo esta rampa inclinada de 60º em relação ao chão, qual é medida da rampa?
a) 10 m.
b) 20 m.
c) 30 m.
d) 40 m.
e) 50 m.

6. Um segmento de reta não paralelo a um plano tem 20cm de comprimento, sua projeção sobre este plano é de $10\sqrt{2}$ cm. Se prolongarmos este segmento até ele cruzar o plano, qual será o ângulo formado pela reta e o plano?
a) 15º
b) 20º
c) 30º
d) 45º
e) 90º

7. (MAPOFEI) Se um dos lados de um ângulo reto é paralelo a um plano e o outro não lhe é perpendicular, a projeção ortogonal do ângulo sobre o plano,
a) é um ângulo reto.
b) é um ângulo agudo.
c) é um ângulo obtuso.
d) depende da posição do plano.
e) n.d.a.

8. Ao meio dia um helicóptero está estável no ar, e é visto por alguém no local de pouso com um ângulo de 30º. Sabendo-se que esta pessoa se encontra a 50 m da sombra do helicóptero sobre o chão, a que altura aproximadamente o helicóptero está do chão?
a) 30 m.
b) 45 m.
c) 60 m.
d) 85 m.
e) 100 m.

9. A projeção ortogonal de uma bola de futebol sobre um plano gera qual figura?
a) Uma elipse.
b) Um círculo.
c) Depende da inclinação do plano.
d) Depende da distância ao plano.
e) Depende da marca da bola.

10. Se um poliedro tem a soma dos ângulos internos de suas faces igual a 2.520º, e sabemos que ele tem 16 arestas, com isso concluímos que o poliedro tem quantas faces?
a) 5 faces.
b) 6 faces.
c) 7 faces.
d) 8 faces.
e) 9 faces.

GABARITO GERAL - PARTE II

FRENTE UM

1. Análise Combinatória

1. a) 600 b) 5 c) $\frac{50}{7}$

2. a) $n+3$ b) n c) $\frac{1}{n-4}$ d) $\frac{(n-1)^2}{n}$

3.c 4.b 5.a 6.b 7.a 8.a 9.a 10.b 11.e
12.a 13.b 14.b 15.e 16.c

2. Probabilidade

1.d 2.a 3.a 4.d 5.c 6.d 7.e 8.d

3. Números Complexos

1. a) 4 – i b) 4 + i c) 4 + i d) -1 e) - 1 – 4i¨ f) – 15 + 7i
g) 5 + i h) 5 – i i) 5 - i j) 13 k) 20 l) – 2i
2. V V F V V V
3.a 4.e 5.a 6.d 7.a
8. a) 1 b) i c) i d) – 1
9.c 10.b 11.d 12.b 13.b 14.a 15.a 16.b 17.b 18.a 19.a
20.Re(z) = 0; Im(z) = - 1; |z| = 1

4. Polinômios

1.c 2.d 3.a

5. Equações Polinomiais

1. a.) {-3,-1,1} b) {-2,-5i,5i} c){0,-i,i} d{-1,10,-10}
2. {-i,i,-3,-1,0,1,5}
3. m=6, x=2 ou x=3
4. {1,-i,i}
5. a) k=10 b)1+2i , 1-2i
6. 1, -1 , 2-3i
7. a) colocar i no valor de x b) $-i, \frac{-7+\sqrt{33}}{4}, \frac{-7-\sqrt{33}}{4}$
8. 5
9. 1
10. 15
11. a) k=4 b) k=10; $1+\sqrt{13}$ e $1-\sqrt{13}$
12. a) m=1 b) $(x+1)^2 \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x-2)$

FRENTE DOIS

6. Prismas

1. $84\sqrt{3}cm^2$ e $36cm^3$
2. $20\sqrt{3}cm^3$
3.d
4. 8cm e 1000cm³
5. $2\sqrt{3}$
6. $358cm^2$ e $420cm^3$
7.a
8. 26.000 m^3 e 4.000 m^2
9. a)1/2, b) 1, c) 2.
10.d
11. 21cm
12.d 13.e

14. Pirâmide
1.b 2.c
3. $\frac{a^3\sqrt{6}}{36}$ e $\frac{a^3\left(36-\sqrt{6}\right)}{36}$
4.e 5.c 6.b
7. $V = \frac{5\sqrt{2}L^3}{12}$
8.b

8. Esfera

1. A=144πcm² V=288πcm³
2. 252πm³
3.d 4.d 5.a 6.d
7. $\frac{2}{3\pi}10^8 km^2$

9. Estatística

1.* 2.* 3.* 4.* 5.* 6.* 7.a 8.d 9.b

FRENTE TRÊS

10. Cilindro

1. 216π
2. a) $V = 810\pi$ e $A_T = 342\pi$ b) $V = 28\pi$ e $A_T = 126\pi$
3. $\sqrt{14}$
4. $\frac{d}{2}$
5.d

11. Cone

1.e
2. $h = \sqrt{\frac{s(m-1)}{\pi}}$
3.c 4.c

12. Introdução à Geometria Analítica Espacial

1. F , F, V, V, V, V, F
2. F, V, V, F, V, V, V
3.a 4.d

13. O Paralelismo e a Perpendicularidade

1. V, F, V,V, F, F, F, F
2. F,V,V,V,F
3.e 4.b 5.d 6.a
7. A reta r é secante ao plano num ponto P. Se r for perpendicular ao plano α, então é perpendicular a todas as retas de α que passam pelo ponto de intersecção de r e α. Se r não é perpendicular ao plano, seja β o plano perpendicular a α que contém r, e seja t a reta que é intersecção de α e β. Para cada ponto de t existe uma reta perpendicular a este ponto e que está contida em α, como $P \in t$, então existe uma reta perpendicular a r que passa por P e pertence a α.
8.e 9.c

14. Poliedros

1. 30
2.c 3.d 4.a 5.d 6.d 7.a 8.d 9.b 10.e